Teoria informacji. Ćwiczenia 20.10.2020

Sortowanie. (Przypomnienie znanego faktu.) Przy pomocy n porównań chcemy posortować M różnych liczb naturalnych. Dla jakich M (w zależności od n) potrafimy to zrobić?

Ważenie monet. Przypuśćmy, że mamy $M \geq 3$ monet, spośród których co najwyżej jedna jest lżejsza niż pozostałe. Chcemy znaleźć fałszywą monetę – lub stwierdzić, że jej nie ma – wykonując jedynie n ważeń. Dla jakich M potrafimy to zrobić?

Przypuśćmy teraz, że co najwyżej jedna moneta jest lżejsza lub cięższa. Chcemy ją znaleźć – o ile istnieje – i określić, który przypadek ma miejsce.
Zauważmy, że przy pomocy 2 ważeń możemy rozstrzygnąć 3 monety, ale nie 4 (dlaczego?).
Oszacować z góry M w zależności od n.

Pokazać, jak przy pomocy 3 ważeń rozstrzygnąć 12 monet.
A czy da się 13 monet?
A gdybyśmy wiedzieli, że dokładnie jedna moneta jest fałszywa (choć nadal nie wiemy – lżejsza czy cięższa) ?

Losowanie przy pomocy niepewnej monety. Przypuśćmy, że rzut naszą monetą z prawdopodobieństwem p daje orła, a z prawdopodobieństwem $1-p$ reszkę, gdzie $0 < p < 1$, ale $p \neq 0.5$. Zasymulować rzut sprawiedliwą monetą, tzn. określić eksperyment, który daje dwa wyniki, każdy z prawdopodobieństwem 0.5.
Uwaga: dopuszczamy, że z prawdopodobieństwem 0 eksperyment może się nie udać.

Kłopotliwa klawiatura. Nasz telefon dysponuje klawiaturą z 26 symbolami $\{a, b, \ldots, z\}$, która jednak z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ „przeskakuje" do następnego symbolu (tzn. b zamiast a, c zamiast b, ..., z zamiast y, a zamiast z). Chcemy jej mimo wszystko używać do przesyłania wiadomości. Czy można to robić wydłużając tekst mniej niż dwukrotnie?

Domyślni więźniowie. W doskonale zaciemnionej hali 100 więźniów nakłada sobie na głowy czapki. Czapki mogą być czarne lub czerwone, zakładamy, że jest ich o wiele więcej niż więźniów (można przyjąć, że ∞). Przy tym oba kolory występują z tą samą częstością i są losowo przemieszane.

Z kolei w pełnym słońcu więźniowie stoją na placu apelowym, każdy widzi czapki swoich towarzyszy, ale nie swoją własną. Jak zwykle w podobnych puzzlach, zadaniem więźnia jest stwierdzić, jaką czapkę ma na głowie. Na dany znak w jednej chwili każdy podnosi jedną rękę. Lewa oznacza „mam czerwoną", a prawa „mam czarną". W tej fazie gry wykluczona jest jakakolwiek komunikacja między więźniami.

Jeśli **wszyscy** podadzą poprawną odpowiedź, i **tylko wtedy**, więźniowie stają się wolni. Jaka jest szansa, że tak będzie?

Podkreślmy, że wcześniej więźniowie mogą ustalić między sobą dowolną strategię postępowania.

Kasyno. Kasyno dysponuje bardzo długim (możemy przyjać, że nieskończonym) ciągiem bitów losowych. W n-tej rundzie gracze A i B typują niezależnie od siebie, jaki będzie n-ty bit: 0 czy 1. Wtedy kasyno ujawnia prawdziwy bit, jak również typy obu graczy. Jeśli **obaj** podali prawidłową odpowiedź, to wygrywają każdy po 1 zł, w przeciwnym razie przegrywają każdy po 2 zł.

Ta propozycja nie byłaby zbyt atrakcyjna, gdyby nie to, że A **zna cały ciąg!** Czy warto grać? Na jaką wygraną gracze mogą liczyć?

To zadanie jest zaczerpnięte z pracy Oliviera Gossnera.