

Seria 11, przekształcenia liniowe, izometrie

Zadanie 1

Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Posługując się macierzą A^{-1} rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 &= 3. \end{cases}$$

Niech $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, gdzie $ad - bc \neq 0$. Wyznaczyć A^{-1} .

Zadanie 2

Znaleźć wartości i wektory własne macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{666}.$$

Obliczyć A^{666} .

Zadanie 3

Znaleźć wzór i macierz symetrii prostopadłej płaszczyzny względem prostej o równaniu $y = 2x$.

Zadanie 4

Podać przykład przekształcenia liniowego płaszczyzny, oraz kwadratu, który zostaje przekształcony na czworokąt, który nie jest prostokątem ani rombem.

Wykazać, że jeśli 0 nie jest wartością własną przekształcenia liniowego ϕ to ϕ przeprowadza dowolny równoległobok na równoległobok.

Zadanie 5

Niech $\phi(x, y) = (3x - 4y, 4x + 3y)$. Wykazać, że dla dowolnego wektora $v \in \mathbb{R}^2$ zachodzi równość:

$$||\phi(v)|| = 5||v||.$$

Zadanie 6

Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będzie izometrią liniową. Wykazać, że istnieje niezerowy wektor v taki, że $\phi(v) = v$ lub $\phi(v) = -v$. Czy to samo jest prawdą dla izometrii liniowych płaszczyzny?