

Matematyka A — kolokwium
27 maja 2016 r., godz. 17:05 — 19:55

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzą je różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia. **Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone!** Nie dotyczy rozruszników serca. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i **NALEŻY** powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

1. (7 p.) Znaleźć wszystkie takie funkcje $t \mapsto x(t)$, że dla każdego t z dziedziny funkcji x zachodzi równość: $x'(t)x(t) + (1 + x(t)^2) \sin t = 0$.
(3 p.) Wśród znalezionych w poprzedniej części tego zadania funkcji znaleźć tę, dla której zachodzi warunek $x(0) = 1$.
-

2. (2 p.) Niech $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Znaleźć wartości własne macierzy M .

(2 p.) Znaleźć wektory własne macierzy M odpowiadające jej wartościom własnym.

(2 p.) Znaleźć wartości własne macierzy M^3 , M^6 i M^{2016} .

(2 p.) Znaleźć wartości i **wszystkie** wektory własne macierzy M^{2016} .

(2 p.) Znaleźć macierz M^{2016} .

3. (2 p.) Niech $M = \begin{pmatrix} 102 & -101 \\ 101 & -100 \end{pmatrix}$. Znaleźć wartości własne macierzy M .

(2 p.) Znaleźć wektory własne macierzy M odpowiadające jej wartościom własnym.

(2 p.) Niech $D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{101} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Znaleźć macierz D^{-1} oraz iloczyn $P = D \cdot M \cdot D^{-1}$.

(2 p.) Wykazać, że wartości własne macierzy M i $P = DMD^{-1}$ są identyczne.

(2 p.) Wykazać, że $M^{10} = D^{-1} \cdot P^{10} \cdot D$. Znaleźć macierze M^{10} i M^{-5} .

4. (10 p.) Zamrożony stek przełożono z zamrażalnika, w którym temperatura równa jest -10°C do lodówki o temperaturze 4°C . Po 4 godzinach temperatura steku była równa -6°C . Po jakim czasie temperatura mięsa osiągnie 2°C ? Wiadomo, że szybkość zmian temperatury steku jest proporcjonalna do różnicy temperatur steku i lodówki (Newtona prawo stygnięcia).
-

5. (10 p.) Rozwiązać równanie $x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 128t^2e^{-2t} + 128t^2 + 128t^2e^{2t} + 128 \sin(2t)$.
-

6. (10 p.) Rozwiązać układ równań $x''(t) + x'(t) - 20x(t) = 900te^{4t} + 900te^{5t}$, $x(0) = -99$.
-