Rozwiązanie wzorcowe

Autorzy: Mateusz Wykurz, Robert Żrałek

Definicja 1. *Graf podróży to graf odwzorowujący podróże zgodne z zadanymi biletami.*

1. *Wierzchołki zawierają informację w jakim mieście jesteśmy, którym biletem tutaj dotarliśmy, ile miast na bilecie już odwiedziliśmy i ile miast zostało nam do odwiedzenia.*

2. *Krawędzie posiadają koszty związane z przejściem z jednego wierzchołka do innego. Są dwa rodzaje krawędzi. Te o zerowym koszcie, które prowadzą pomiędzy kolejnymi miastami na już kupionym bilecie oraz te o koszcie równym cenie biletu, prowadzące od pierwszego do drugiego miasta na nowo zakupionym bilecie.*

3. *Oprócz tego graf zawiera jeden dodatkowy wierzchołek, start, który nie jest umiejscowiony w żadnym konkretnym mieście, nie zawiera informacji o bilecie i mamy wciąż wszystkie miasta do odwiedzenia. Z wierzchołka tego wychodzą krawędzie o kosztach równych cenie biletów, tak, jakby miasto odpowiadające startowi było pierwszym miastem na tym bilecie.*

Twierdzenie 1. *Każda ścieżka w grafie podróży, od startu, do pewnego wierzchołka z zerową liczbą pozostałych miast do odwiedzenia, odpowiada podróży, w której odwiedziliśmy kolejno wszystkie zadane miasta i odwrotnie, każdej podróży, w której odwiedziliśmy kolejno wszystkie zadane miasta, odpowiada pewna ścieżka w grafie podróży, od startu, do pewnego wierzchołka z zerową liczbą pozostałych miast do odwiedzenia. Koszt podróży jest taki sam, jak koszt przejścia po wszystkich krawędziach ścieżki.*

Dowód. Odwzorowanie to jest poprawne, ponieważ krawędzie w grafie podróży prowadzą z dowolnego stanu wyłącznie do stanu będącego kontynuacją podróży na tym samym bilecie, o ile jest możliwa, lub kupieniu nowego biletu, o ile jest to możliwe. Podróż możemy zacząć z dowolnego miasta, a start odpowiada dowolnemu miastu, bo możemy wykupić ze startu dowolny bilet.

Wniosek 1. *Najtańsza możliwa podróż, w której odwiedzamy zadane miasta w podanej kolejności, jest najtańszą ścieżką w grafie podróży prowadzącą od startu, do wierzchołka z zerową liczbą pozostałych miast do odwiedzenia.*

Algorytm 1. *Schemat algorytmu użytego do rozwiązania zadania:*

1. *Stwórz graf podróży na podstawie biletów i listy miast do odwiedzenia.*

2. *Znajdź najkrótszą ścieżkę prowadzącą od startu do pewnego wierzchołka z zerową liczbą pozostałych miast do odwiedzenia.*

Poprawność: Wynika wprost z Twierdzenia 1.

Złożoność: W grafie podróży oznaczmy liczbę wierzchołków jako n a liczbę krawędzi jako m. Wtedy tworzenie grafu podróży łatwo jest wykonać w czasie $O(m * log(n))$ zaczynając od *startu* i rekurencyjnie budując graf, za każdym razem sprawdzając, czy wierzchołek, do którego chcemy stworzyć krawędź już istnieje. Każdą krawędź tworzymy raz a sprawdzenie, czy wierzchołek juz istnieje, możemy wykonywać na drzewie czerwono czarnym.

Znalezienie najkrótszej ścieżki od startu do pewnego wierzchołka z zerową liczbą pozostałych miast do odwiedzenia możemy wykonać stosując algorytm Dijkstry do grafu podróży i znajdując najkrótsze ścieżki od startu do wszystkich pozostałych wierzchołków. Prosta implementacja pozwala na wykonanie tego w czasie $O(m * log(n))$. Następnie w czasie $O(n)$ znajdujemy najkrótszą z tych ścieżek.

Liczbę wierzchołków w grafie podróży można łatwo oszacować ze względu na informacje, które w sobie taki wierzchołek przechowuje.

Oznaczenia:

- a = liczba miast
- b = liczba biletów
- c = liczba miast na bilecie
- d = liczba miast do odwiedzenia

$n = O(a * b * c * d + 1)$

Jednak miasto w którym jesteśmy można obliczyć z biletu, którym ostatnio lecieliśmy oraz liczby pozostałych miast na bilecie. Oznacza to, że:

$n = O(b * c * d + 1)$

Ponieważ z każdego wierzchołka poza startem wychodzą co najwyżej $1 + liczbabiletw = 1 + b$ krawędzi, daje to szacowanie na liczbę krawędzi:

$m = O(b * (n - 1) + b) = O(b * n)$

Testowanie 1. *Integralną częścią rozwiązania było przygotowanie testów zgodnych z treścią zadania. Jednym z założeń było, że będzie dokładnie jedna poprawna odpowiedź do każdego testu.*

Algorytm Dijkstry zastosowany do grafu podróży da długość najkrótszej ścieżki od startu do każdego wierzchołka. Jeżeli istnieją ścieżki do różnych wierzchołków o tym samym koszcie można to łatwo wykryć.

Jednak do jednego wierzchołka mogą prowadzić dwie różne ścieżki, obie o minimalnym koszcie.

Przykład:
3
10 3 1 2 4
10 3 1 3 4
10 2 4 5
1
3 1 4 5
0

Dwie różne ścieżki prowadzą przez bilety 1, 3 i 2, 3 do tego samego wierzchołka. Obie o tym samym minimalnym koszcie 20.

Algorytm 2. *Użyty do weryfikacji unikalności rozwiązania*

1. *Stwórz graf podróży na podstawie biletów i listy miast do odwiedzenia.*

2. *Znajdź najkrótsze ścieżki do wszystkich wierzchołków z zerową liczbą pozostałych miast do odwiedzenia. Jeżeli są co najmniej dwie ścieżki o takiej samej minimalnej długości, lub nie ma żadnej to test jest zły. Algorytm kończy działanie. W przeciwnym zapisz minialną ścieżkę i jej koszt.*

3. *Dla każdej krawędzi z zapisanej ścieżki:*

   (a) *Usuń tą krawędź.*

   (b) *Znajdź koszt najkrótszej ścieżki ze startu do jakiegoś wierzchołka z zerową liczbą pozostałych miast do odwiedzenia.*

   (c) *Porównaj otrzymaną wartość z otrzymanym poprzednio wynikiem. Jeśli są równe to test jest zły. Algorytm kończy działanie.*

4. *Test jest dobry. Algorytm kończy działanie.*

Poprawność: Dla dwóch różnych ścieżek w grafie musi istnieć przynajmniej jedna krawędź, przez którą jedna przechodzi a druga nie.

Po usunięciu dowolnej krawędzi z grafu w nowym grafie istnieją ścieżki wyłącznie z poprzedniego grafu, które nie przechodziły przez usuniętą krawędź.

Jeśli istnieją dwie ścieżki o minimalnym koszcie to algorytm je znajdzie.