Opracowanie: h/
Problem H: The Great Wall Game

HISTORIA:
• wersja 1.0: 2007, Tomasz Weksej, Bogdan Yakovenko

dokument systemu SINOL 1.3.1

1 Rozwiązanie

Celem gry jest ułożenie ”Wielkiego Muru”, czyli umieszczenie wszystkich n pionków w jednej linii. Można go osiągnąć na kilka sposobów:

- Ułożyć wszystkie pionki w jednej linii poziomej (jest n takich pozycji, po jednej dla każdego wiersza)
- Ułożyć wszystkie pionki w jednej linii pionowej (jest n takich pozycji, po jednej dla każdej kolumny)
- Ułożyć wszystkie pionki na przekątnej (są dwie takie pozycje)

Aby znaleźć optymalne rozwiązanie dla każdej z powyższych możliwości, sformułujmy nieco ogólniejszy problem:

Problem najtańszego przemieszczenia

Niech $s_1, s_2, \ldots, s_n$ będą różnymi pionkami umieszczonymi na polach startowych o współrzędnych $s_i = (s_x^i; s_y^i)$. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_n$ będą różnymi polami planszy o współrzędnych $p_i = (p_x^i; p_y^i)$. Zadanie polega na przemieszczeniu pionków z pól startowych na polach końcowe $p_1, p_2, \ldots, p_n$ za pomocą jak najmniejszej liczby ruchów.

Rozpatrzmy rozwiązanie optymalne, gdzie pionek s_1 zostanie przemieszczony na pole p_{k_1}, s_2 na pole p_{k_2}, ..., s_i na pole p_{k_i} i tak dalej. Spróbujmy wyznaczyć liczbę ruchów potrzebnych do takiego przemieszczenia. Gdyby nie było ograniczenia, że na jednym polu może stać tylko jeden pionek byłaby to po prostu suma odległości między s_i i p_{k_i}, czyli $\sum_{i=1}^{n} |s_x^i - p_x^{k_i}| + |s_y^i - p_y^{k_i}|$.

Teoretycznie nasza sytuacja jest dużo gorsza - nie zawsze można przemieścić pionek po najkrótszej ścieżce bo może być ona blokowana przez inne pionki. Zauważmy jednak, że w rzeczywistości nie jest to problemem.

Rozpatrzmy więc raz jeszcze optymalne rozwiązanie, gdzie pionek s musi być przemieszczony z pozycji $a = (s_x; s_y)$ na $a' = (p_x; p_y)$. Jedna z najkrótszych ścieżek między tymi polami to $a = a_0, a_1, \ldots, a_c = a'$. Niech pola $a = a_{b_1}, a_{b_2}, \ldots, a_{b_m}$, $b_1 < b_2 < \ldots < b_m$ będą tymi polami spośród pól a_i na których są już rozmieszczone pionki.

Najpierw rozpatrzmy sytuację gdy pole a' jest puste. Przesunięcie pionka z a na a' można osiągnąć w następujący sposób: przesunąć pionek z a_{b_m} na a', przesunąć pionek z $a_{b_{m-1}}$ na a_{b_m}, $\cdots$, przesunąć pionek z a na a_{b_2}. Potrzebujemy do tego c ruchów, co jest równe długości najkrótszej ścieżki między s i a.

Zajmijmy się teraz sytuacją gdy na polu a' stoi już jakiś pionek. On powinien być z kolei przesunięty na pole a'' . Jeśli pole a'' jest puste, to na mocy poprzedniej obserwacji można za pomocą optymalnej liczby ruchów przesunąć pionek z pola a' na a'', a następnie pionek z pola a na a'. Jeżeli natomiast pole a'' jest zajęte, to rozpatrzmy ciąg pól $h = \{a''', a^{(4)}, \ldots\}$ (gdzie a''' jest polem na które powinien być przesunięty pionek z pola a'', itd.). Zauważmy, że musi być on zakończony pustym polem - w przeciwnym przypadku w naszym rozwiązaniu powinniśmy cyklicznie przesunąć pionki, co jest równoznaczne z wykonaniem bezsensownych ruchów. Stoi to w oczywistej sprzeczności z faktem, że rozpatrujemy rozwiązanie optymalne.

Probem najtańszego przemieszczenia możemy więc sprowadzić do problemu najtańszego skojarzenia: każdy z pionków $s_1, s_2, \ldots, s_n$ musi być skojarzony z jednym z pól $p_1, p_2, \ldots, p_n$, w taki sposób, że suma odległości między skojarzonymi polami jest minimalna. Istnieje kilka standardowych algorytmów rozwiązujących ten problem, na przykład algorytm węgierski (ang. Hungarian Algorithm)

Skoro udało nam się rozwiązać problem najtańszego przemieszczenia, powróćmy do naszego zadania. Może być ono rozwiązane poprzez znajdowanie najtańszego przemieszczenia między polami startowymi i każdą z linii poziomych, pionowych i ukośnych. W tym przypadku będziemy musieli po prostu $2n + 2$ razy rozwiązać problem najtańszego przemieszczenia.

Zauważmy jednak, że przypadki linii poziomych i pionowych są dużo prostsze. Wykonujemy przecież tylko ruchy w poziomie i pionie, a w przypadku ułożenia wszystkich pionków w jednej linii poziomej (pionowej) liczba ruchów pionowych (poziomych) jest stała i nie zależy od skojarzenia. Wystarczy więc znaleźć optymalną linię i tylko dla niej rozwiązać problem najtańszego przemieszczenia. Dzięki temu należy rozwiązać jedynie 4 problemy najtańszego przemieszczenia.

Możemy pójść jeszcze krok dalej i przypadek linii poziomych i pionowych rozwiązać jeszcze prościej. Po znalezieniu optymalnej linii, optymalne skojarzenie możemy znaleźć w zachłanny sposób: w przypadku linii poziomych sortujemy pionki niemalejąco względem pionowej współrzędnej, a następnie pole o współrzędnej pionowej 1 skojarzymy z pierwszym pionkiem, pole o współrzędnej pionowej 2 z drugim pionkiem itd. Niestety przypadek linii ukośnych musimy rozwiązać już z użyciem problemu najtańszego przemieszczenia.

Złożoność przedstawionego rozwiązania to $O(n^3)$, z uwagi na fakt, że wykorzystujemy w nim algorytm węgierski. Dla zadanych ograniczeń jest to w zupełności wystarczające.