Tiling the Plane

Zadanie G, 2004/2005

Tadeusz Sznuk

1 Wprowadzenie

Rozwiązanie opiera się na własnościach punktów A,B,C,D,E,F wspomnianych w treści zadania. Własności te udowodnione zostały w części 3. Prowadzą one do prostego algorytmu o złożoności $O(n^3)$, opisanego w tej samej części. Sekcja 2 zawiera różnorakie definicje wykorzystywane w sekcji 3. Ostatnia część zawiera opis algorytmy sprawdzania cyklicznej równoważności słów, wykorzystywanego przez główny algorytm (opisany w sekcji 3).

2 Definicje

Odległość Odległość między punktami na obwodzie wielokąta, mierzona przy przejściu w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara począwszy od pierwszego punktu. Odległość między X i Y oznaczona jest przez $|XY|$.

Punkt przeciwny Punkt przeciwny dla X to punkt $\overline{X}$ taki, że $|X\overline{X}| = |\overline{X}X|$.

Rozwiązanie Zbiór $S = \{A, B, C, D, E, F\}$ nazywany jest rozwiązaniem, jeśli punkty A,B,C,D,E,F mają własności wspomniane w specyfikacji zadania.

Punkt rozwiązania Punkt należący do rozwiązania. Gdy mówimy, że dane punkty są punktami rozwiązania, mamy na myśli *to samo* rozwiązanie - np. "jeśli X jest punktem rozwiązania to $\overline{X}$ również jest punktem rozwiązania" oznacza, że jeśli $X \in S$ dla rozwiązania S, to $\overline{X} \in S$. $next(X)$ to następny po X punkt rozwiązania, $prev(X)$ - poprzedni.

Reprezentacja napisowa Fragment obwodu wielokąta możemy interpretować jako ciąg liter `N`,`E`,`W`,`S` opisujący jego obejście w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (przy użyciu jednostkowych kroków). Taką reprezentację fragmentu obwodu od X do Y oznaczamy przez $str(X, Y)$. $compressedStr(X, Y)$ to ciąg par $\langle$ kierunek, długość $\rangle$ równoważny $str(X, Y)$.

Operacje na ciągach $rev(S)$ to odwrócenie ciągu S. $S^{(i)}$ to ciąg S po cyklicznym przesunięciu o i pozycji w lewo. $neg(S)$ to ciąg S w którym każdy kierunek zamieniony został na przeciwny (`N` $\rightarrow$ `S`, `E` $\rightarrow$ `W`, ...). Jeśli S jest ciągiem par kierunek-długość, kierunki wewnątrz par są zmieniane.

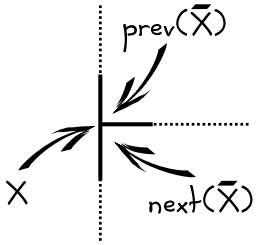
Cykliczna równoważność $V_1 \cong V_2$ wtw. $\exists i : V_1^{(i)} = V_2$.

Złe punkty Punkt rozwiązania X nazywany jest *złym* jeśli ani X, $\overline{X}$ nie jest wierzchołkiem.

3 Rozwiązanie

Lemat 1 (♠). *Jeśli punkt rozwiązania X nie jest wierzchołkiem, to punkty $prev(\overline{X})$ i $next(\overline{X})$ są wierzchołkami.*

"Dowód". Zobaczmy, jak wygląda wyłożenie płaszczyzny wielokątem (w okolicy punktu X). □



Lemat 2 (♢). *Jeśli X jest zły, to wszystkie pozostałe punkty rozwiązania oprócz $\overline{X}$ są wierzchołkami.*

Dowód. Zastosowanie ♠ do X i $\overline{X}$ (który nie jest wierzchołkiem, bo X jest zły). □

Lemat 3 (♣). *Punkty X i Y są kolejnymi punktami rozwiązania wtd. gdy $str(X,Y) = neg(rev(str(\overline{X},\overline{Y})))$ i $str(Y,\overline{X}) \cong neg(rev(str(\overline{Y},X)))$*

Dowód. Jeśli rozwiązanie $\{X,Y,Z,\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}\}$ istnieje, to $str(Y,Z) = neg(rev(str(\overline{Y},\overline{Z})))$ i $str(Z,\overline{X}) = neg(rev(str(\overline{Z},X)))$. Zatem $str(Y,\overline{X}) = str(Y,Z)str(Z\overline{X}) = neg(rev(str(\overline{Y},\overline{Z})))neg(rev(str(\overline{Z},X))) = neg(rev(str(\overline{Z},X)str(\overline{Y},\overline{Z}))) = neg(rev(str(\overline{Y},X)))^{(|Z\overline{X}|)}$. □

Wniosek. *Możemy znaleźć 4 punkty rozwiązania sprawdzając wszystkie pary wierzchołków X,Y wraz z ich punktami przeciwnymi $\overline{X}$ i $\overline{Y}$ (♢). Aby sprawdzić, czy wybrany punkty należą do jakiegoś rozwiązania, możemy użyć ♣.*

Bezpośrednie zastosowanie ♣ wymaga wyliczenia $str(Y,\overline{X})$. Ten ciąg może być bardzo długi. Dlatego chcielibyśmy sprawdzać cykliczną równoważność słów w ich skompresowanej formie (np. `6 N 3 E` zamiast `NNNNNNEEE`). Łatwo zauważyć, że takie przekształcenie nie wpływa na cykliczną równoważność, o ile pierwsza litera różna jest od ostatniej. Możemy zapewnić tę własność przesuwając ciąg w lewo aż będzie spełniona. Taką modyfikację możemy przeprowadzić na ciągu w formie skompresowanej.

Wniosek. *Warunki ♣ mogą zostać sprawdzone bez wyliczania nieskompresowanej reprezentacji fragmentów obwodu.*

Jest n^2 par wierzchołków (Uwaga: pozwalamy na dwukrotny wybór tego samego punktu aby poradzić sobie z przypadkiem czteropunktowym). Skompresowana reprezentacja fragmentu obwodu wielokąta może być wyliczona w czasie $O(n)$. Cykliczna równoważność może być sprawdzona w czasie $O(n)$, z użyciem dowolnego algorytmu dopasowania wzorca ($s \cong t$ jeśli s występuje w tt) albo procedurę z następnej sekcji. Zatem przedstawiony poniżej algorytm działa w czasie $O(n^3)$.

Rozwiązanie

procedura `fix (`s`)`
  jeśli s `zawiera więcej niż jedną parę`
    niech $\langle d, l \rangle$ `będzie ostatnią parą kierunek-odległość z` s`.`
    jeśli `pierwszy kierunek w` s `to` d
      `usuń ostatnią parę z` s`.`
      `dodaj` l `do długości pierwszej pary z` s
end

dla wszystkich $\langle x, y \rangle \in \{u | u \in V$ lub $\overline{u} \in V\}$
  jeśli `compressed_str(x, y) = neg(rev (compressed_str(`$\overline{x}$`, `$\overline{y}$`)))`
    s_1 `= fix (compressed_str (`$y, \overline{x}$`));`
    s_2 `= fix (neg (rev (compressed_str (`$\overline{y}, x$`)));`
    jeśli `length(`s_1`) = length(`s_2`)`
      jeśli $s_1 \cong s_2$ **zwróć** `1;`

zwróć `0;`

4 Cykliczna równoważność słów

Ta część opisuje algorytm rozwiązujący problem cyklicznej równoważności słów w czasie liniowym i stałej pamięci, bez stosowania dopasowania wzorca. Algorytm jest prosty i łatwy w implementacji. Jego kod w Javie przedstawiono poniżej.

```
static boolean cyclicEquiv (int[] v1, int[] v2) {
   int i, j, k, n;

   n = v1.length;
   if (n ≠ v2.length) return false;
   i = 0; j = 0; k = 0;
   while ((i < n) && (j < n)) {
      while (v1[(i + k) % n] == v2[(j + k) % n]) {
         k++;
         if (k == n) return true;
      }
      if (v1[i + k] > v2[j + k]){
         i = i + k + 1;
      } else {
         j = j + k + 1;
      }
      k = 0;
   }
   return false;
}
```

Lemat 4. *Funkcja* `cyclicEquiv(`v_1`, `v_2`)` *zwraca* **true** *wtw. gdy* $v_1 \cong v_2$.

Dowód. Niech D_1 będzie zbiorem wszystkich liczb i takich, że $v_1^{(i)}$ (v_1 przesunięte o i pozycji) jest większe (w porządku leksykograficznym) niż v_2 przesunięte o j pozycji dla jakiegoś j ($i \in D_1$ jeśli $\exists j : v_1^{(i)} \gg v_2^{(j)}$). Niech D_2 będzie zbiorem wszystkich liczb j takich, że $v_2^{(j)}$ jest większe niż v_1 przesunięte o i pozycji dla jakiegoś i.

Jeśli $v_1 \cong v_2$, to $D_1 \neq n$ i $D_2 \neq n$, ponieważ istnieją liczby p, q takie, że $v_1^{(p)} = v_2^{(q)}$) - $p \notin D_1$ i $q \notin D2$.

Przed i po każdej iteracji zewnętrznej pętli `cyclicEquiv` zachodzi następujący niezmiennik: $i \subseteq D_1$ oraz $j \subseteq D_2$. Po ostatniej iteracji zachodzi albo $D_1 = n$, albo $D_2 = n$ (czyli v_1 nie jest cyklicznie równoważne v_2). Polecenia `return` wykonywane jest tylko, gdy $v_1^{(i)} = v_2^{(j)}$. □

Lemat 5. *Funkcja* `cyclicEquiv(v1, v2)` *działa w czasie* $O(length(v_1))$

Dowód. Każda iteracja zewnętrznej pętli zwiększa $i + j$ o $1 + k$, gdzie k jest liczbą iteracji wewnętrznej pętli. Ponieważ $i + j < 2n$, algorytm wykona co najwyżej $2n$ kroków. □