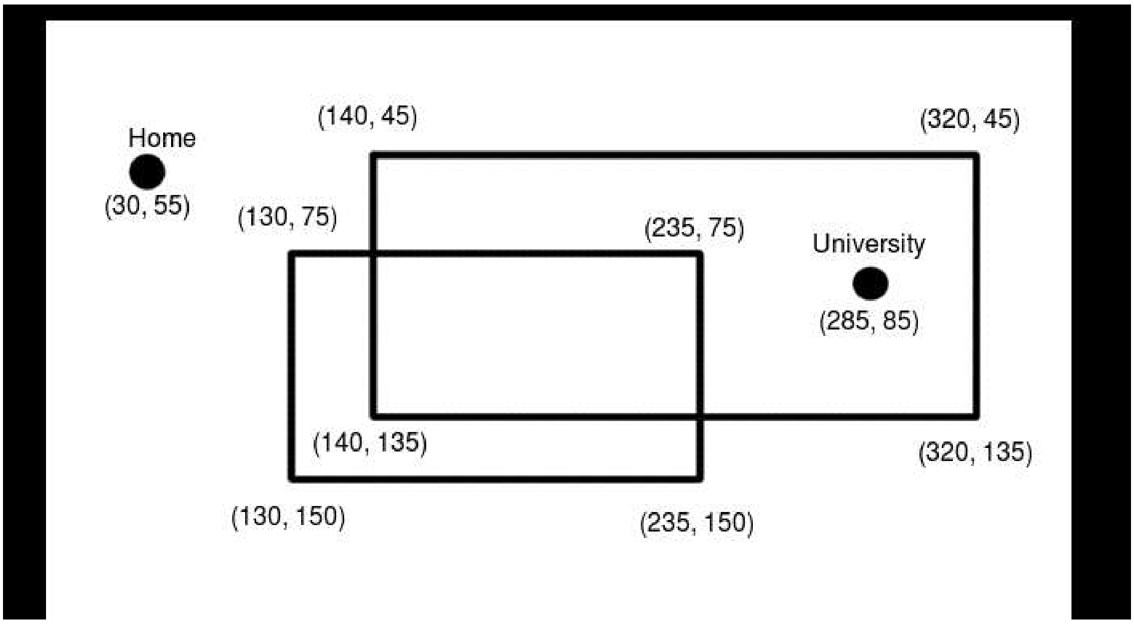
ACM 2005, Problem F. Opracowanie zadania.

Michał Korch, Michał Szynkiewicz

8 stycznia 2007

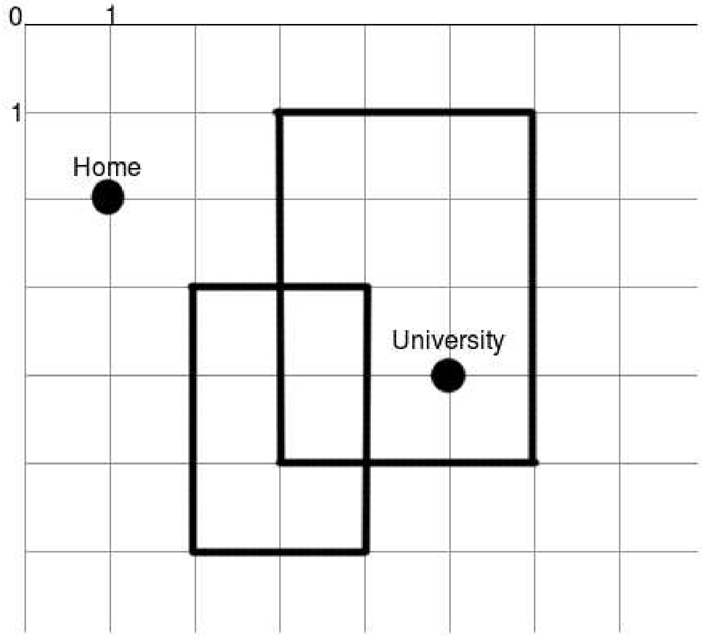
1 Opis rozwiązania

W zadaniu nie interesuje nas rzeczywista długość drogi jaką trzeba przebyć, a jedynie liczba ulic jakie trzeba przekroczyć. Dlatego możemy skompresować mapę, tak aby najmniejsza współrzędna miała wartość 1, kolejna 2 itd. (patrz rysunki).



Rysunek 1: Mapa przed przeskalowaniem.

Jako pole (a,b) oznaczmy kwadrat między prostymi o równaniach: $y = b$, $y = b - 1$, $x = a$, $x = a - 1$.
Jako, że wszystkie ulice są pionowe lub poziome i nie możemy przechodzić przez skrzyżowania ulic, a odległość nas nie interesuje, możemy ograniczyć się do przemieszczania się pionowo lub poziomo.



Rysunek 2: Mapa po przeskalowaniu.

Tym samym nas zproblem możemy utożsamić z problemem szukania najkrótszej ścieżki w grafie, za którego wierzchołki przyjmiemy wszystkie pola na mapie, a krawędziami będą połączone wierzchołki odpowiadające polom, które mają wspólny bok. Długość krawędzi między dwoma wierzchołkami będzie równa zero dla pól pomiędzy którymi nie ma ulicy, równa jeden w przeciwnym przypadku.
Do obliczenia minimalnej odległości użyjemy algorytmu Dijkstry. Dzięki specyfice naszego grafu (konkretnie: temu, że krawędzie mają wagę 1 lub 0), możemy zastosować kolejkę priorytetową o wszystkich operacjach w czasie stałym, bo maksymalna różnica między priorytetami w kolejce wynosi 1. Można ją zaimplementować jako strukturę składającą się z dwóch list, jednej zawierającej elementy o priorytecie równym priorytetowi minimalnego elementu, drugiej zawierającej elementy o priorytecie o 1 wyższym.
Dzięki temu algorytm Dijkstry działać będzie w czasie liniowym względem wielkości grafu.

2 Analiza kosztu

Ozn n = liczba współrzędnych.

1. Skompresowanie (sortowanie współrzędnych i przemianowywanie): $\Theta(nlogn)$

2. Utworzenie grafu pól (reprezentowanego w tablicy): $\Theta(n^2)$
3. Szukanie minimalnej ścieżki: $\Theta(n^2)$

Sumaryczny koszt: $\Theta(n^2)$