

## Twierdzenia o wartości średniej - rozwiązania wybranych zadań

1. Funkcja  $f$  jest różniczkowalna na  $(a, b)$ . Czy jest prawdą, że dla każdego  $\xi \in (a, b)$  istnieją  $x_1, x_2$ , takie że  $a < x_1 < \xi < x_2 < b$  i

$$f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}?$$

**Odp.** Nie wynika. Rozważmy funkcję  $f(x) = x^3$  jest to funkcja ściśle rosnąca, więc dla  $x_1 \neq x_2$  wyrażenie po prawej stronie równości jest większe od zera, a  $f'(0) = 0$ .

- 4 Funkcja  $f \in C([a, b])$ , gdzie  $a > 0$ . Załóżmy ponadto, że  $f$  jest różniczkowalna na  $(a, b)$  oraz spełnia warunek

$$\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}.$$

Wykaż, że istnieje takie  $x_0 \in (a, b)$ , że  $x_0 f'(x_0) = f(x_0)$ .

**Rozwiązanie** W filmiku p. Z. Grochulskiej (link na rocket czacie).

- 5 Wykaż, że funkcja  $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$  nie jest różniczkowalna w  $x_0 = 1$ .

**Rozwiązanie** w filmiku (link na rocket czacie).

- 6 **Założmy, że  $0 < x < y$ .** Wykaż nierówności

$$\frac{y-x}{y} \leq \ln \left( \frac{y}{x} \right) \leq \frac{y-x}{x}.$$

**Rozwiązanie.** Sprowadźmy równości do równoważnej postaci

$$\frac{1}{y} \leq \frac{\ln y - \ln x}{y-x} \leq \frac{1}{x}.$$

Zastosujemy twierdzenie Lagrange'a dla funkcji  $\ln t$  na przedziale  $(x, y)$

$$\frac{\ln y - \ln x}{y-x} = \frac{1}{\xi}$$

dla pewnego  $\xi \in (x, y)$ . Ponieważ liczby  $x, y, \xi$  są dodatnie mamy:  $\frac{1}{y} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$ , co kończy dowód.

- 7 Stosując twierdzenie o wartości średniej wykaż, że funkcje  $\sin x$  oraz  $\arctg x$  są lipschitzowskie ze stałą 1.

**Rozwiązanie dla  $\arctg x$ .**

Zastosujemy twierdzenie Lagrange'a dla funkcji  $\arctg t$  na przedziale  $(x, y)$ . Dostajemy (po obłożeniu równości modulem)

$$\frac{|\arctg x - \arctg y|}{|x-y|} = \frac{1}{1+\xi^2} \leq 1.$$

- 8 Zbadaj jednostajną ciągłość funkcji

$$f(x) = (e^x - 1) \sin \left( \frac{1}{5^x - 1} \right).$$

na a) przedziale  $(0, 2020)$ ,

b) na przedziale  $(0, +\infty)$ .

**Rozwiązanie**

(a) Policzmy granice na krańcach przedziału:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) \sin \left( \frac{1}{5^x - 1} \right) = 0,$$

(iloczyn funkcji zbieżnej do zera przez funkcję ograniczoną)

$$\lim_{x \rightarrow 2020} (e^x - 1) \sin \left( \frac{1}{5^x - 1} \right) = (e^{2020} - 1) \sin \left( \frac{1}{5^{2020} - 1} \right).$$

Funkcja jest jednostajnie ciągła jako funkcja ciągła, która ma skończone granice na krańcach.

(b) Policzmy pochodną

$$f'(x) = e^x \sin \left( \frac{1}{5^x - 1} \right) - (e^x - 1) \cos \left( \frac{1}{5^x - 1} \right) \cdot \frac{1}{(5^x - 1)^2} \cdot 5^x \ln 5.$$

Zauważmy, że na przedziale  $[1, \infty)$  funkcja  $f'$  jest ograniczona. Istotnie, pierwszy składnik powyższej sumy jest ograniczony, bo jest funkcją ciągłą na  $[1, \infty)$  i ma skończoną granicę w nieskończoności

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| e^x \sin \left( \frac{1}{5^x - 1} \right) \right| \leq \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \left( \frac{1}{5^x - 1} \right) = 0.$$

Podobnie dowodzimy, że ograniczony jest drugi składnik

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x - 1)(5^x \ln 5)}{(5^x - 1)^2} \cos \left( \frac{1}{5^x - 1} \right) = 0.$$

Stąd wynika, że  $f$  jest funkcją lipschitzowską na  $[1, \infty)$  zatem jest jednostajnie ciągła na tym przedziale. Ponadto z podpunktu (a) wynika, że  $f$  jest jednostajnie ciągła na  $(0, 1]$ , a z udowodnionego na ćwiczeniach twierdzenia  $f$  jest jednostajnie ciągła na  $(0, \infty)$ .

9 Czy funkcja  $f(x) = \cos e^x$  jest ciągła jednostajnie na

a) przedziale  $(0, +\infty)$

b) na przedziale  $(-\infty, 0)$ .

(a) **Dokładniejsza wskazówka** Nie są. Rozważyć ciągi  $x_n = \ln(2n\pi)$  i  $y_n = \ln \left( 2n\pi + \frac{\pi}{2} \right)$ , pokazać, że ich różnica zbiega do zera, ale ciąg  $f(x_n) - f(y_n)$  nie jest zbieżny do zera. (b) Link z filmikiem autorstwa p. Grochulskiej

10 Skonstruuj przykład funkcji  $f$  ciągłej na  $[0, \infty)$ , takiej że  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , ale funkcja nie jest lipschitzowsko ciągła na żadnym przedziale postaci  $[a, \infty)$ ,  $a > 0$ .

## Zastosowania pochodnych II.

1. Wykaż nierówności

3  $\operatorname{tg} x > x$  dla  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

**Wskazówka** Pokazać, że funkcja  $f(x) = \operatorname{tg} x - x$  jest ściśle rosnąca na  $(0, \infty)$  oraz, że  $f(0) = 0$ .

(a)  $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$  dla  $x > 0$ .

**Rozwiązanie**

Rozważmy  $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ . Ta funkcja w zerze przyjmuje wartość zero. Wystarczy pokazać, że jej pochodna jest dodatnia dla  $x > 0$ . Mamy

$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Chcemy udowodnić nierówność  $f'(x) > 0$ . Policzmy drugą pochodną:

$$f''(x) = -\sin x + x > 0.$$

Stąd  $f'$  jest funkcją rosnącą, która przyjmuje wartość 0 w zerze, więc jest dodatnia na  $(0, 1)$  co kończy dowód.