Wprowadzenie do zgrubnej geometrii

*Michał SKRZYPCZAK**

*student, Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Na geometrię można patrzeć jako na dziedzinę badającą różnorodne przestrzenie metryczne. Podczas takich badań jedno z fundamentalnych zagadnień, to pytanie jakie obiekty uważamy za „takie same”.

Powszechnie przyjęte jest, że figury *izometryczne* są takie same. Mówimy, że dwa zbiory A, B są izometryczne, gdy istnieje funkcja zachowująca odległość, idąca z A na B.

Już dzieci w podstawówce wiedzą, że trójkąty ABC, DEF są „takie same” Rys. 1

Często również figury podobne uznaje się za jednakowe. Standardowy przykład to litera A pisana przez panią nauczycielkę na tablicy i literki A pisane w zeszytach dzieci.

Zarówno izometryczność jak i podobieństwo odnoszą się do kształtu figury (jej rozmiarów, proporcji, kątów,...). Topologia podchodzi do figur w bardziej ogólny sposób. Dwie figury (zbiory) A, B są homeomorficzne jeśli istnieje przekształcenie ciągłe A na B takie, że przekształcenie odwrotne B na A też jest ciągłe. Na przykład jeden zbiór można przekształcić na drugi poprzez rozciąganie i ściskanie, dopuszczalne jest też rozcinanie, byle tylko skleić potem „tak samo”. Można sobie wyobrazić, że zbiory są wykonane z gumy. Odcinek otwarty $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ jest homeomorficzny prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$, intuicyjnie wystarczy go rozciągnąć do nieskończoności.

Rys. 2 Z topologicznego punktu widzenia krzywe γ i δ są jednakowe, ale pierścień P i kwadrat K już nie.

Zgrubna geometria to kolejny sposób patrzenia na przestrzenie metryczne. Sposób ten różni się bardzo istotnie od poprzednio podanych. Nie jest ważny dokładny kształt figury, czy jest ona gruba czy cienka, czy jest w jednym kawałku, czy nie. Istotne jest jak figura wygląda „z bardzo daleka”. Ze zgrubnego punktu widzenia wszystkie zbiory ograniczone są równoważne (w szczególności każde dwa trójkąty są jednakowe). Natomiast zbiór ograniczony nigdy nie jest równoważny zbiorowi nieograniczonemu, między innymi odcinek nie może być zgrubnie równoważny prostej.

W dalszej części artykułu precyzyjniej opiszemy powyższe intuicje.

Aparat zgrubnej geometrii pozwala badać dowolne przestrzenie metryczne i nie tylko. W tym artykule dla uproszczenia ograniczę się tylko do przestrzeni będących podzbiorami przestrzeni euklidesowych $\mathbb{R}^n$. Odległość dwóch punktów $a, b \in \mathbb{R}^n$ oznaczać będę $d(a,b)$. Na przykład dla $n = 2, a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)$ mamy

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}.$$

Zdefiniujmy kilka rodzajów funkcji o specyficznych własnościach.

Definicja 1. *Dla $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz funkcji $f\colon X \to Y$, mówimy że f jest*

- *metrycznie właściwa (ang. proper), gdy przeciwobrazy wzdłuż f zbiorów ograniczonych, są ograniczone.*

  Czyli gdy dla każdego zbioru ograniczonego $B \subseteq Y$, zbiór

  $$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

  jest ograniczony.

Zbiór B jest ograniczony, gdy jest zawarty w pewnej kuli. Na przykład każdy sześcian jest ograniczony, natomiast dowolna prosta nie jest.

- *bornologiczna (ang. bornologous) jeśli*

  $$\forall_{R>0} \exists_{S>0} \forall_{x,y \in X}\ d(x,y) < R \Rightarrow d(f(x),f(y)) < S.$$

  Czyli dla każdego $R > 0$ można szacować jak bardzo oddalone od siebie będą obrazy dowolnych dwóch punktów odległych o mniej niż R.

- *zgrubna (ang. coarse), jeśli spełnia obie powyższe własności.*

Chodzi nam o to by funkcje zgrubne zachowywały globalny kształt przestrzeni widzianej z dalekiej perspektywy. W związku z tym nie powinny jej za bardzo zgniatać (metryczna właściwość), ani przesadnie rozciągać w żadnym kierunku (bornologiczność).

Oczywiście dla każdego zbioru X, $\mathrm{id}_X(x) = x$ jest funkcją zgrubną. Ponadto złożenie funkcji zgrubnych też jest zgrubne.

Pora na kilka przykładów:

- Niech $\mathbb{R}_+$ to wszystkie dodatnie liczby rzeczywiste. Funkcja $f(x) = \frac{1}{x} \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, nie jest ani właściwa, ani bornologiczna. Po pierwsze $f^{-1}((0,1]) = [1,\infty)$, więc f nie jest właściwa. Po drugie dla $R = 1$, nie może istnieć $S > 0$, że dla x, y takich, że $\forall_{x,y\in\mathbb{R}_+} d(x,y) < R \Rightarrow d(f(x), f(y)) < S$. Gdyby takie S istniało, to dla $x = 1$, $y = \frac{1}{2S+1}$ było by $d(x,y) < R$, oraz $d(1, 2S+1) = 2S > S$ - sprzeczność.

- Funkcja $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ stale równa 1 nie jest właściwa ($f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{N}$), ale jest bornologiczna, bo niezależnie od $R > 0, S > 0, x, y$, mamy $d(f(x), f(y)) = d(1,1) = 0 < S$.

- $f(n) = n^2 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest właściwa (zbiory ograniczone w $\mathbb{N}$ są skończone), ale nie bornologiczna. Gdyby f była bornologiczna, to w szczególności dla $R = 2$ istniało by $S > 0$, że dla x, y takich, że $d(x,y) < 1$, $d(f(x), f(y)) < S$. Wtedy dla $x = S, y = S+1$, mamy $d(x,y) = 1 < R$, a jednocześnie $d(f(x), f(y)) = d(S^2, S^2 + 2S + 1) = 2S + 1 > S$ - sprzeczność.

- Funkcja $f(x) = \lfloor x \rfloor$ idąca z prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$, w liczby całkowite $\mathbb{Z}$ jest zgrubna. $\lfloor x \rfloor$ to „podłoga x”, czyli największa liczba całkowita mniejsza równa x. Proponuję pokazać, że f jest zgrubna, jako proste ćwiczenie.

Rys. 3 Prosta rzeczywista $\mathbb{R}$ i liczby całkowite $\mathbb{Z}$ widziane z daleka

Definicja 2. *Dla danych zbiorów $X, Y \in \mathbb{R}^n$, dwa przekształcenia $f, g \colon X \to Y$ nazywamy bliskimi (ang. close), gdy zbiór*

$$\{d(f(x), g(x)) : \ x \in X\}$$

jest ograniczony.

Jeśli dwie funkcje spełniają powyższą definicję, to patrząc na nie z dostatecznie daleka wydają się być jednym i tym samym przekształceniem.

Przykładowo jeśli przekształcenie $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ każdy punkt $x \in \mathbb{R}^n$ przemieszcza o co najwyżej 100, to $\{d(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq [0, 100]$, więc f jest bliska $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Oczywiście 100 można zastąpić dowolną ustaloną liczbą.

Definicja 3. *Dwa zbiory $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ są zgrubnie równoważne (ang. coarsely equivalent) gdy istnieją funkcje zgrubne $f \colon X \to Y$ i $g \colon Y \to X$, takie że ich złożenia są bliskie identycznościom ($f \circ g$ bliskie id_Y, oraz $g \circ f$ bliskie id_X).*

Rys. 4 Zbiory A, B są ograniczone, więc zgrubnie równoważne

Udowodnimy, że dwa niepuste zbiory ograniczone $B, C \subseteq \mathbb{R}^n$ są zgrubnie równoważne. Niech funkcje $f \colon B \to C$, $g \colon C \to B$ będą funkcjami stałymi (przyjmującymi po jednej wartości). Jak łatwo sprawdzić funkcje te są zgrubne, bo zbiory B i C są ograniczone. Ponadto złożenia $f \circ g, g \circ f$ to funkcje stałe, a skoro B jest ograniczony, to każda funkcja stała $B \to B$ jest bliska id_B (analogicznie z C). Więc B, C zgrubnie równoważne.

Fakt 1. *Jeśli dane są funkcje zgrubne $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, to funkcja*

$$f \times g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

powstająca przez stosowanie f, g „po współrzędnych” też jest zgrubna.

$(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$

Warto spróbować samodzielnie wykazać powyższy fakt.

Fakt 2. *Przestrzenie $\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}^n$ są zgrubnie równoważne dla $n = 1, 2, \ldots$.*

Dowód. Ustalmy n. Rozważmy $f(x_1, \ldots, x_n) = (\lfloor x_1 \rfloor, \ldots, \lfloor x_n \rfloor) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{Z}^n$, oraz $g(z) = z \colon \mathbb{Z}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Funkcja f jest zgrubna, gdyż jest zastosowaniem funkcji zgrubnej $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ „po współrzędnych”. Funkcja g jest izometrią (zachowuje odległości punktów), więc oczywiście jest zgrubna. Ponadto $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}^n}$, więc $g \circ f$ bliskie $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}^n}$. Z drugiej strony $f \circ g$ przesuwa każdy punkt o mniej niż $d((0, \ldots, 0), (1, \ldots, 1)) = \sqrt{n}$, więc jest bliskie $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. ∎

Przestrzenie $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$, dla $n \neq m$ nie są zgrubnie równoważne, jednak dowód jest dalece nietrywialny, wykorzystuje pojęcie *wymiaru asymptotycznego* – zgrubnej wersji definicji wymiaru. Fakt ten oznacza między innymi, że prosta i płaszczyzna nie są zgrubnie równoważne. Odpowiada to intuicji mówiącej o patrzeniu na przestrzeń „z bardzo daleka”: niezależnie z jak daleka nie spojrzymy na prostą, zawsze jest ona „cienka” natomiast płaszczyzna zawsze jest „szeroka”.

Pora na kilka ciekawych faktów.

Rys. 5 *3-gwiazdka* i inne trzy parami nierównoległe proste są zgrubnie równoważne.

Fakt 3. *Niezależnie od tego jak położymy na płaszczyźnie trzy proste (oby tylko żadne dwie z nich nie były równoległe), zbiór punktów tych prostych jest zgrubnie równoważny 3-gwiazdce.*

Powyższy fakt wciąż jest prawdziwy, gdy zamiast prostych rozważymy pasy ustalonej szerokości, oraz gdy przejdziemy z $\mathbb{R}^2$ do dowolnej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Ponadto zamiast trzech prostych i *3-gwiazdki*, możemy rozważać dowolne k parami nierównoległych prostych i *k-gwiazdkę*.

Warto zwrócić uwagę, że w powyższym fakcie zgrubna równoważność jest rozumiana szerzej, niż w dotychczas podawanej definicji. Zbiory zgrubnie równoważne mogą wyglądać nieco inaczej nawet z dalekiej perspektywy, byle tylko miały podobny globalny kształt.

Ze zgrubnego punktu widzenia ograniczone zaburzenia danego zbioru są nieistotne. Mówi o tym poniższy fakt.

Fakt 4. *Dla dowolnego nieograniczonego zbioru $X \subseteq \mathbb{R}^n$, dowolnej kuli $K \subseteq \mathbb{R}^n$, oraz zbioru $B \subseteq K$, zbiory X oraz $(X \setminus K) \cup B$ są zgrubnie równoważne.*

Zbiór $(X \setminus K) \cup B$ jest to X z wyciętą dziurą w miejscu K i wstawionym zamiast tego zbiorem B.

Konsekwencją powyższego faktu jest stwierdzenie, że płaszczyzna, oraz płaszczyzna z wyciętą kulą o promieniu 10^{16} są zgrubnie równoważne.

Kolejną operacją na zbiorze, która nie wpływa na jego zgrubne własności jest „powiększanie punktów”. Zamiast każdego punktu zbioru, wstawiamy dowolny niepusty i ograniczony zbiór. Ściślej jest to sformułowane poniżej.

Przez $K(x, r)$ oznaczam kulę o środku x i promieniu r.

Fakt 5. *Rozważmy dowolne $R > 0$, dowolny zbiór $X \subseteq \mathbb{R}^n$, oraz rodzinę zbiorów $\{B_x\}_{x \in X}$ - po jednym zbiorze dla każdego punktu w x. Załóżmy, że po pierwsze dla każdego $x \in X$ zbiór B_x jest niepusty, a po wtóre, że $B_x \subseteq K(x, R)$. Wtedy zbiory X, oraz $\bigcup_{x \in X} B_x$ są zgrubnie równoważne.*

Zastosujmy ten fakt dla $R = 1$, X będącego prostą, natomiast zbiorów $B_x = K(x, 1)$. Wtedy założenia są spełnione, a zbiór $\bigcup_{x \in X} B_x$ to pas o szerokości dwa. Dowodzi to, że prosta i pas szerokości dwa są zgrubnie równoważne.

W następnym akapicie pojawia się wiele pojęć, których wyjaśnienie dalece wykracza po za ramy pisma popularnonaukowego. Dlatego też jedynie zaznaczę ich związek z tematem artykułu.

Zgrubna geometria, oprócz wskazania zupełnie nowego sposobu patrzenia na przestrzenie metryczne, wniosła dostrzegalny wkład w rozwój matematyki. Jeden ze sposobów wykorzystania zgrubnej geometrii jest następujący: Chcemy zbadać zależności pomiędzy rozmaitością M, a jej grupą podstawową G. Wprowadzamy na G metrykę długości słowa. Badamy zgrubne własności grupy G i nakrycia uniwersalnego M. Uzyskane rezultaty tłumaczymy na homotopijne własności M i algebraiczne własności G. Jednym z sukcesów takiego sposobu postępowania jest częściowy dowód hipotezy Novikova. Wynik ten jest o tyle ważny, że rozumowanie to pracuje dla wielu klas rozmaitości. Hipoteza Novikova jest jednym z najważniejszych problemów otwartych w topologii.

Osobom zainteresowanym zgrubną geometrią polecam książkę [1]. Ponadto pewnym rozszerzeniem powyższego artykułu są referaty [2].

Literatura

[1] J. Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series 31, American Mathematical Society (2003).

[2] M. Skrzypczak,
Zgrubne spojrzenie na przestrzenie metryczne,
Wprowadzenie do zgrubnej geometrii,
http://students.mimuw.edu.pl/~mskrzypczak/dokumenty/