Zadanie 1

W tym zadaniu chcemy pokazać, że istnieją duże i względnie gęste grafy bez małych cykli. Na potrzeby zadania cykl uznamy za mały, jeżeli jego długość wynosi co najwyżej 4. Rozważmy graf losowy o n wierzchołkach, w którym krawędź między każdymi dwoma wierzchołkami istnieje z prawdopodobieństwem p.

(a) Niech Y będzie liczbą krawędzi w grafie losowym. Proszę wyznaczyć $\mathbb{E}[Y]$ oraz $\mathrm{Var}(Y)$. Proszę podać ograniczenie górne na prawdopodobieństwo tego, że $Y \leq \mathbb{E}[Y]/2$, tzn. liczba krawędzi jest dwa razy mniejsza niż jej wartość oczekiwana.

(b) Niech X będzie liczbą małych cykli. Proszę obliczyć $\mathbb{E}[X]$.

(c) Proszę oszacować z góry $P(X \geq n)$.

(d) Proszę znaleźć wartość p, dla której $\mathbb{E}[Y] = c_1 n^{1+\varepsilon}$ i $P(X \geq n) \leq \frac{c_2}{n^\varepsilon}$ dla pewnych stałych c_1 i c_2 oraz $\varepsilon > 0$.

(e) Proszę wywnioskować, że dla odpowiednio dużego n istnieje graf z $c_3 n^{1+\varepsilon}$ krawędziami i bez małych cykli.

(a) Niech Y_{ij} będzie zmienną losową opisującą czy między wierzchołkami i i j istnieje krawędź. Wtedy $Y = \sum_{1\leq i<j\leq n} Y_{ij}$. Łatwo zauważyć, że $\mathbb{E}\, Y_{ij} = p$, a zatem $\mathbb{E}\, Y = p \cdot \frac{n(n-1)}{2}$. Żeby policzyć wariancję $\mathrm{Var} Y = \mathbb{E}\, Y^2 - (\mathbb{E}\, Y)^2$, musimy policzyć:

$$P(Y_{ij} = 1 \wedge Y_{kl} = 1) = \begin{cases} p & i = k \wedge j = l \quad (\# = \frac{n(n-1)}{2}) \\ p^2 & \text{w przeciwnym wypadku} \quad (\# = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}) \end{cases}$$

zatem

$$\mathbb{E}\, Y^2 = p\frac{n(n-1)}{2} + p^2\left(\frac{n^2(n-1)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)}{2}\right)$$

Ostatecznie

$$\mathrm{Var} Y = p\frac{n(n-1)}{2} + p^2\left(\frac{n^2(n-1)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)}{2}\right) - p^2 \cdot \frac{n^2(n-1)^2}{2^2} = p\frac{n(n-1)}{2} - p^2\frac{n(n-1)}{2} = p\,(1-p)\,\frac{n(n-1)}{2}.$$

Równoważnie można było zauważyć, że zmienne losowe Y_{ij} są niezależne, a wtedy można skorzystać z liniowości wariancji.

$$P\left(Y \leq \frac{\mathbb{E}\, Y}{2}\right) = P\left(\mathbb{E}\, Y - Y \geq \frac{\mathbb{E}\, Y}{2}\right) \leq P\left(|\mathbb{E}\, Y - Y| \geq \frac{\mathbb{E}\, Y}{2}\right) \leq \frac{4 \cdot \mathrm{Var} Y}{(\mathbb{E}\, Y)^2} \leq 8 \cdot \frac{1-p}{p} \cdot \frac{1}{n(n-1)}$$

(b) Niech $X = X_3 + X_4$, gdzie X_i to liczba cykli długości i. Prawdopodobieństwo uzyskania cyklu o długości 3 to p^3, a o długości 4 to p^4. Liczba możliwych trójek to $\binom{n}{3}$ a czwórek $\binom{n}{4} \cdot 3$ *. Wtedy:

$$\mathbb{E}\, X = \binom{n}{3} \cdot p^3 + 3 \cdot \binom{n}{4} \cdot p^4 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot p^3 \left(1 + \frac{3}{4}p(n-3)\right)$$

(c) Korzystamy z nierówności Markowa:

$$P(X \geq n) \leq \frac{\mathbb{E}\, X}{n} = \frac{(n-1)(n-2)}{6} \cdot p^3 \left(1 + \frac{3}{4}p(n-3)\right)$$

(d) Wyznaczmy wartość p z pierwszej równości:

$$\mathbb{E}\, Y = p \cdot \frac{n(n-1)}{2} = c_1 n^{1+\varepsilon} \qquad \Longrightarrow \qquad p = 2c_1\frac{n^\varepsilon}{n-1}$$

i podstawmy ją do drugiej nierówności:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{6} \cdot p^3 \left(1 + \frac{3}{4}p(n-3)\right) \geq P(X \geq n) \leq \frac{c_2}{n^\varepsilon}$$

---

* Musimy jeszcze uwzględnić wszystkie możliwe cykle czterech wierzchołków

$$\frac{(n-1)(n-2)}{6} \cdot 8c_1^3 \frac{n^{3\varepsilon}}{(n-1)^3} \left(1 + \frac{3}{4} 2c_1 \frac{n^\varepsilon}{n-1}(n-3)\right) = \frac{8c_1^3}{6} \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n^{3\varepsilon}}{n-1} \left(1 + \frac{6c_1}{4} \frac{n-3}{n-1} \cdot n^\varepsilon\right) = *$$

Dla odpowiednio dużych n możemy zapisać asymptotyczną postać:

$$* = \alpha n^{3\varepsilon - 1} + \beta n^{4\varepsilon - 1}$$

Porównajmy to teraz

$$\alpha n^{3\varepsilon - 1} + \beta n^{4\varepsilon - 1} \leq \frac{c_2}{n^\varepsilon} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha n^{4\varepsilon - 1} + \beta n^{5\varepsilon - 1} \leq c_2$$

Zatem jeśli $\varepsilon > \frac{1}{5}$ to dla odpowiednio dużego n powyższa nierówność jest spełniona. Podsumowując, istnieje takie p, że dla odpowiednio dużego n oraz ε równość i nierówność w treści zadania są spełnione.

(e) Skoro mamy dwa ograniczenia z zadania wyżej to możemy stwierdzić, że możemy dobrać tak prawdopodobieństwo p, że liczba krawędzi będzie rosła szybciej niż liniowo, a liczba małych cykli będzie malała. Zatem można zauważyć, że mogę mieć dowolnie dużo krawędzi i dowolnie mało małych cykli, bo mogę wziąć odpowiednio duże n.

Zadanie 2

Jaś i kilku jego kolegów postanawiają grać w następujący wariant gry w kolekcjonera historyjek z gum do żucia. Każda guma ma jedną z n historyjek. Każdy z graczy kupuje co tydzień, niezależnie, jedną losową gumę. W każdym tygodniu, po tym jak każdy kupi swoją cotygodniową gumę, z prawdopodobieństwem p wszyscy gracze, którzy w danym tygodniu nie zdobyli nowej (nie posiadanej wcześniej) historyjki umawiają się na przyjęcie. W czasie przyjęcia każdy bierze jedną gumę z banku gum do żucia (podobnie jak sklep, bank wydaje losową gumę).

(a) Niech X będzie liczbą tygodni potrzebną na to by Jaś zebrał wszystkie historyjki. Oblicz $\mathbb{E}\,X$ (odpowiedź może mieć postać sumy).

(b) Podaj wyrażenie na $\mathrm{Var}X$.

(c) Podaj przybliżone wyrażenie, w terminach p, na wartość oczekiwaną w punkcie (a). (*Podpowiedź*: dla $a \in [0,1)$, $\int_0^a 1/(1-cx)\mathrm{d}x = (-1/c)\ln(1-ca)$).

(d) Pokaż, że z prawdopodobieństwem co najmniej $1/2$, Jaś zbierze wszystkie historyjki w przeciągu dwukrotnej oczekiwanej liczby tygodni.

(a) Najpierw zastanówmy się, jaką szanse ma Janek na zdobycie jednej nowej historyjki w tygodniu, zakładając, że ma już i unikalnych historyjek – może albo wylosować z losowo kupionej gumy ($\frac{n-i}{n}$) albo wylosować historyjkę, którą już ma ($\frac{i}{n}$), pójść na przyjęcie (p) oraz wylosować nową historię ($\frac{n-i}{n}$). Zatem

$$p_i = \frac{n-i}{n} + \frac{i}{n}\cdot p \cdot \frac{n-i}{n} = \frac{n-i}{n}\left(1 + p\frac{i}{n}\right).$$

Niech X_i to zmienna losowa, określająca liczbę tygodni, po której zbierze nową historyję, mając już i uniklanych historyjek, oraz $X = \sum_{i=0}^{n-1} X_i$. Wiemy, że $X_i \sim \mathrm{Geo}(p_i)$, a zatem $\mathbb{E}\,X_i = \frac{1}{p_i}$. Korzystając z liniowości wartości oczekiwanej:

$$\mathbb{E}\,X = \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\,X_i = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{n}{n-i}\frac{1}{1+p\frac{i}{n}} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1-\frac{i}{n}}\frac{1}{1+p\frac{i}{n}} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\frac{1}{p+1}}{1-\frac{i}{n}} + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\frac{p}{p+1}}{1+p\frac{i}{n}} =$$

$$\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1-\frac{i}{n}} + \frac{p}{p+1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+p\frac{i}{n}} = \frac{1}{p+1}nH_n + \frac{p}{p+1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+p\frac{i}{n}}$$

(b) Zauważmy, że zmienne losowe X_i i $X_{j\neq i}$ są niezależne (podobnie jak w klasycznym zadaniu ze zbieraniem historyjek). Przypomnijmy, że $\mathrm{Var}X_i = \frac{1-p_i}{p_i^2}$, a co za tym idzie:

$$\mathrm{Var}X = \sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{Var}X_i = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1-p_i}{p_i^2} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{p_i^2} - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{p_i}$$

(c) Jeśli n jest wystarczająco duże to możemy skorzystać z przybliżenia $H_n \approx \ln n + \gamma$, gdzie γ to stała Eulera. Możemy także przybliżyć drugą część:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+p\frac{i}{n}} = n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+p\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n} \approx n\int_0^1\frac{1}{1+px}\mathrm{d}x = n\cdot\frac{1}{p}\cdot\ln(1+p).$$

Ostatecznie, dla dużych n mamy

$$\mathbb{E}\,X \approx \frac{1}{p+1}n(\ln n + \gamma) + \frac{1}{p+1}n\ln(1+p) = \frac{1}{p+1}n[\ln n + \gamma + \ln(1+p)]$$

(d) Chcemy policzyć $P(X < 2\,\mathbb{E}\,X)$. Korzystamy z nierówności Markova:

$$P(X < 2\,\mathbb{E}\,X) = 1 - P(X \geq 2\,\mathbb{E}\,X) \geq 1 - \frac{\mathbb{E}\,X}{2\,\mathbb{E}\,X} = \frac{1}{2}.$$

Zatem prawdopodobieństwo, że Jaś zbierze wszystkie historyjki w przeciągu dwukrotnej liczby tygodni wynosi **co najmniej** $1/2$.

Zadanie 3

Procedura obliczania maksimum dostaje na wejściu n liczb. Czyta je sekwencyjnie, za każdym razem zapamiętując największą dotychczas wczytaną liczbę na zmiennej V. Rozważmy sytuację, w której procedura dostaje na wejściu losową permutację liczb naturalnych od 1 do n.

(a) Średnio ile razy w ciągu swojego wykonania procedura zaktualizuje wartość zmiennej V?

(b) Oblicz wariancję powyższej wartości.

(c) „Maksymalny przebieg długości k” pojawia się, gdy wspomniana procedura napotyka maksymalną sekwencję złożoną z k liczb uporządkowanych ściśle rosnąco (maksymalną w tym sensie, że nie ma przed nią liczby mniejszej niż pierwsza liczba w sekwencji i nie ma za nią liczby większej niż ostatnia w sekwencji). Oblicz oczekiwaną liczbę maksymalnych przebiegów długości k jako funkcję k.

(d) Podaj najmniejszą wartość k, dla której oczekiwana liczba uzyskana powyżej dąży do 0, gdy n dąży do $+\infty$. (*Podpowiedź:* $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$.)

(a) Niech X_i to zmienna losowa opisująca, czy algorytm zaktualizuje zmienną V na miejscu i, a $X = \sum_i X_i$. Innymi słowy, X_i opisuje czy spośród wszystkich liczb przed i-tą pozycją, liczba na i-tej pozycji jest największa. Policzmy, w ilu permutacjach wartość na i-tej pozycji jest większa od wszystkich poprzednich. Najpierw wybieramy wartości na pozycje $1, \ldots, i$ na $\binom{n}{i}$ sposobów. Największa z nich stanie na pozycji i. Pozostałe wartości, czyli pozycje $1, \ldots, (i-1)$ oraz $(i+1), \ldots, n$ permutujemy dowolnie na $(i-1)! \cdot (n-i)!$ sposobów.

$$P(X_i = 1) = \frac{\binom{n}{i}(i-1)!(n-i)!}{n!} = \frac{n! \cdot (i-1)! \cdot (n-i)!}{n! \cdot i! \cdot (n-i)!} = \frac{1}{i}$$

$$\mathbb{E}\, X = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = H_n$$

(b) Do policzenia wariancji potrzebujemy policzyć $P(X_i = 1 \wedge X_j = 1)$. Policzmy, w ilu permutacjach wartości na pozycjach i oraz j są większe od wszystkich poprzednich, gdy $i < j$. Najpierw wybieramy j wartości na pozycje $1, \ldots, j$ na $\binom{n}{j}$ sposobów. Największa z nich stanie na pozycji j-tej. Spośród pozostałych $j-1$ wybranych, ponownie wybieramy i wartości na pozycje $1, \ldots, i$ na $\binom{j}{i}$ sposobów. Największa z nich stanie na pozycji i-tej. Pozostałe liczby permutujemy dowolnie na $(i-1)! \cdot (j-i-1)! \cdot (n-j)!$ sposobów.

$$P(X_i = 1 \wedge X_j = 1) = \frac{\binom{n}{j} \cdot \binom{j-1}{i} \cdot (i-1)! \cdot (j-i-1)! \cdot (n-j)!}{n!} = \frac{n! \cdot (j-1)! \cdot (i-1)! \cdot (j-i-1)! \cdot (n-j)}{n! \cdot j! \cdot i! \cdot (j-i-1)! \cdot (n-j)!} = \frac{1}{ij}$$

Zauważmy, że wynik jest też prawdziwy dla $i > j$.

$$P(X_i = 1 \wedge X_j = 1) = \begin{cases} \frac{1}{i} & i = j \\ \frac{1}{ij} & i \neq j \end{cases}$$

Zatem

$$\mathrm{Var} X = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{1}{ij} - H_n^2 = H_n + H_n^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} - H_n^2 = H_n - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \le H_n - \frac{\pi^2}{6}$$

(c) Niech X_i^k to zmienna losowa mówiąca, czy w miejscu i-tym zaczyna się maksymalny przebieg o długości k. Wtedy $X^k = \sum_{i=1}^{n-k} X_i^k$ to zmienna losowa opisująca liczbę wszystkich takich ciągów w permutacji. Korzystając z liniowości wartości oczekiwanej $\mathbb{E}\, X^k = \sum_{i=1}^{n-k} \mathbb{E}\, X_i^k$. Policzmy, w ilu permutacjach w miejscu i-tym zaczyna się maksymalny przebieg o długości k. Na początek załóżmy, że $i > 1 \wedge k \le n-2$. Najpierw wybieramy wartości na pozycje $(i-1), \ldots, (i+k+1)$ na $\binom{n}{k+2}$ sposobów. Teraz musimy zdecydować, które z wybranych wartości zostaną ‘strażnikami’ na pozycjach $i-1$ oraz $i+k+1$. Rozbijmy wybór strażników na 4 przypadki:

1. Najmniejszy i największy z wybranych elementów nie są strażnikami. Z pozostałych elementów możemy wybrać dowolne 2 na $k(k-1)$ sposobów.

2. Pierwszym strażnikiem jest największy element, ale drugim nie jest najmniejszy. Wtedy drugiego strażnika możemy wybrać na $k-1$ sposobów, ponieważ odpadają nam elementy: największy, drugi największy oraz najmniejszy.

3. Drugim strażnikiem jest ostatni element, ale pierwszym nie jest największy. Analogicznie, pierwszego strażnika wybieramy na $k-1$ sposobów.

4. Pierwszym strażnikiem jest największy element, a drugim najmniejszy. Jest dokładnie 1 taki przypadek.

W sumie możemy wybrać strażników na $k(k-1)+(k-1)+(k-1)+1 = k^2+k-1$ sposobów. Reszta wybranych elementów jest ustawiona jednoznacznie w kolejności rosnącej. Niewybrane elementy permutujemy dowolnie na $(n-k-2)!$ sposobów.

$$\mathbb{E}X_i^k = \frac{\binom{n}{k+2}\cdot(k^2+k-1)\cdot(n-k-2)!}{n!} = \frac{n!\cdot(k^2+k-1)\cdot(n-k-2)!}{n!\cdot(k+2)!\cdot(n-k-2)!} = \frac{k^2+k-1}{(k+2)!}$$

Należy jeszcze rozważyć przypadki brzegowe. Jeśli $(i=1 \lor i=n-k) \land k \leq n-1$, wystarczy wybrać $k+1$ elementów i jednego strażnika. Jeżeli $k=n$, warunek zadania spełnia tylko jedna permutacja.

$$\mathbb{E}X_i^k = \begin{cases} \frac{1}{n!} & k=n \\ \frac{k}{(k+1)!} & (i=1 \lor i=n-k) \land k \leq n-1 \\ \frac{k^2+k-1}{(k+2)!} & i>1 \land k \leq n-2 \end{cases}$$

Pozostaje już tylko posumować obliczone składniki.

$$\mathbb{E}X^k = \begin{cases} \frac{1}{n!} & k=n \\ 2\frac{k}{(k+1)!} & k=n-1 \\ 2\frac{k}{(k+1)!}+(n-k-1)\frac{k^2+k-1}{(k+2)!} & k<n-1 \end{cases}$$

d) Tutaj pewnie trzeba podstawić $k=\alpha n$ dla $\alpha<1$ i zobaczyć dla jakiego najmniejszego α powyższe wartości oczekiwane dążą do zera.