Zadanie 3 (10 pkt). Janek uwielbia gumę do żucia. Każda paczka zawiera kupon ze zdjęciem piłkarza. Jest n różnych kuponów; jeśli Janek zbierze wszystkie kupony, może wziąć udział w loterii, w której może wygrać bilet na finał Pucharu Świata. Janek ma dobrych kolegów, którzy też zbierają kupony, ale wolą je kupować od niego. Załóżmy, że dla $i = 1, \ldots, n$, po każdym zebraniu nowego i-tego kuponu, Janek zbiera pierwsze i kuponów, aż ma dodatkową kopię każdego z nich, zanim będzie mógł zaakceptować nowy $i + 1$ kupon w swojej kolekcji. Ile gum musi średnio kupić Janek, by zebrać wszystkie kupony? Odpowiedź wystarczy podać w formie $\Theta(f(n))$.

Przykładowo: w kolejnych gumach Janek znajduje kupony z następujacymi piłkarzami: Lewandowski, Neymar, Xavi, Lewandowski, Lewandowski, Marta, Xavi. Janek nie może zaakceptować kuponów Neymara ani Xavi, bo jeszcze nie zdobył drugiego kuponu Lewandowskiego. Po zdobyciu drugiego kuponu Lewandowskiego może zaakceptować kolejny nowy kupon (Marta), po czym będzie musiał zdobyć kopie obu kuponów (trzeci Lewandowski, druga Marta) przed zaakceptowaniem trzeciego, itd.

$\longrightarrow$

Prześledźmy to po kolei:

1) aby zebrać pierwszy kupon potrzebuje 1 gumę

2) aby zebrać drugi kupon musi zebrać drugi kupon pierwszego rodzaju czyli średnio n gum

3) dla i-tego Janek musi zebrać dodatkową kopię z poprzednich $i-1$ kuponów.

$$\boxed{n^2 \log(n)}$$

$$P(\cdot) \;\Big|\; \boxed{1} \xrightarrow{\frac{1}{n}} \boxed{1} \xrightarrow{\frac{n-1}{n}} \boxed{2} \xrightarrow{\frac{2}{n}} \boxed{1/2} \xrightarrow{\frac{1}{n}} \boxed{2/1} \xrightarrow{\frac{n-2}{n}} \boxed{3}$$

$$E(\cdot) \;\Big|\; \underbrace{n}_{n} \quad \frac{n}{n-1} \quad \underbrace{\frac{n}{2} \quad n}_{n(1+\frac{1}{2})} \quad \frac{n}{n-2}$$

$$\underbrace{n \left| \begin{array}{llll} 1 & & & \\ 1 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \\ \vdots & & & \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \ \ldots & \frac{1}{n} \end{array} \right.}_{n\left(n + (n-1)\frac{1}{2} + (n-2)\frac{1}{3}\right)} + \underbrace{n \left| \begin{array}{l} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-2} \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right.}_{n \cdot \ln(n)}$$

$$n^2\Big(\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n}}_{\ln(n)} \underbrace{- \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n} - \ldots \frac{1}{n^2}}_{-\frac{1}{n}\ln(n)}\Big) + n\ln(n)$$

Zadanie 3 (12 punktów).

(a, 4 punkty) Generator liczb losowych X generuje liczby losowe z rozkładem Poissona z parametrem λ. Niestety, te liczby są za małe, także postanowiliśmy stworzyć generator większych liczb losowych Y w sposób następujący: piszemy 1, następnie X losowych cyfr 0 i 1 (za każdym razem losujemy niezależnie od wyniku generatora X i poprzednich cyfr), i otrzymany zapis traktujemy jako zapis liczby w systemie dwójkowym. (Przykładowo, jeśli generator X zwróci 5, to generator Y zwróci losową liczbę od 32 do 63.) Podaj wartość oczekiwaną liczby zwracanej przez generator Y.

(b, 4 punkty) Uogólnienie punktu (a): X generuje liczby losowe z rozkładem o funkcji tworzącej $f_X(t)$ określonej dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Wyraź EY przy użyciu funkcji tworzącej $f_X(t)$.

(c, 4 punkty) Podaj wariancję liczby zwracanej przez generator Y (w wersji ogólnej z (b) lub w przypadku szczególnym z (a) – do wyboru).

Przydatne wzory. $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$X \sim Poiss(\lambda)$

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

a)

$$EY = P(k=0) \cdot \frac{1}{1} \cdot \overset{1}{1} +$$

$$P(k=1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \overset{10}{2} + P(k=1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \overset{11}{3} +$$

$$+ P(k=2) \cdot \frac{1}{4} (\overset{100}{4} + \overset{101}{5} + \overset{110}{6} + \overset{111}{7}) + \ldots$$

$$2^i \cdot 2^i + (1 + 2 + \ldots 2^i - 1)$$

$$\frac{1}{2}(2^i - 1)2^i = 2^{i-1}(2^i - 1)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P(X=i) \cdot \frac{1}{2^i} \cdot \overbrace{(2^i + 2^i + 1 + \ldots + 2^i + 2^i - 1)}^{2^i \cdot 2^i + (1 + 2 + \ldots 2^i - 1)} =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \frac{1}{2^i}\left(2^{2i} + \frac{1}{2}2^i(2^i - 1)\right) =$$

$$e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}\left[2^i + \frac{1}{2}2^i - \frac{1}{2}\right] = e^{-\lambda} \frac{3}{2} \overbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2\lambda)^i}{i!}}^{e^{2\lambda}} - \frac{1}{2}e^{-\lambda} \overbrace{\sum \frac{\lambda^i}{i!}}^{1} = \boxed{\frac{3}{2}e^{\lambda} - \frac{1}{2}}$$

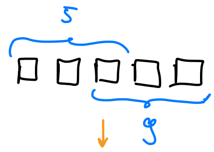
$$\mathbb{E}Y^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \frac{1}{2^i}\left[2^{4i} + 2^{3i}(2^i-1) + \frac{1}{4}2^{2i}\overbrace{(2^i-1)^2}^{2^{2i}-2^{i+1}+1}\right]$$

$$2^{4i} + 2^{4i} - 2^{3i} + \frac{1}{4}2^{4i} - \frac{1}{2}2^{3i} + \frac{1}{4}2^{i}$$

$$\frac{9}{4}2^{4i} - \frac{3}{2}2^{3i} + \frac{1}{4}2^{i}$$

$$\mathbb{E}Y^2 = \frac{9}{4}e^{7\lambda} - \frac{3}{2}e^{3\lambda} + \frac{1}{4}$$

Zadanie 1 (12 punktów). Dany jest 5-elementowy ciąg wyrazów ze zbioru 0, 1, ..., 9. Znaleźć prawdopodobieństwo, że suma pierwszych 3 wyrazów wynosi 5, a suma ostatnich 3 wyrazów wynosi 8.



$5 \to$ 4 1 0, 3 2 0

$9 \to$ 2 3 4, 3 6 0, 2 7 0, 1 8 0, 4 5 0, 1 3 5, 1 2 6

4	2 2	0	4 · 2	8
2	1 · 2	1	3 · 2	6
2	1 · 2	2	3 · 2	6
2	1 · 2	3	3 · 2	6
2	1 · 2	4	2 · 2	4

$2\cdot2\cdot4\cdot2 + 1\cdot2\cdot3\cdot2 + 1\cdot2\cdot3\cdot2 +$

$+ 1\cdot2\cdot3\cdot2 + 1\cdot2\cdot3\cdot2 =$

$32 + 12 + 12 + 12 + 8 = 76$

$$\frac{76}{\binom{10}{5}} = \frac{76}{10!}\,5!\,5! = \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot19\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{10}\cdot9\cdot\cancel{8}\cdot7\cdot\cancel{6}} = \frac{19}{63} \approx 0.3$$