Rachunek prawdopodobieństwa – przykładowe rozwiązania

Autorzy:
Michał Siemaszko, Magdalena Stobińska

Przykładowe rozwiązania z Rachunku Prawdopodobieństwa dla informatyków. Zadania są dostępne na serwerze *ważniak.mimuw.edu.pl*.

18 grudnia 2024

1 Schemat klasyczny

Definicja (Schemat klasyczny) Wszystkie zdarzenia elementarne są równo prawdopodobne, licząc prawdopodobieństwo liczymy stosunek liczby zdarzeń sprzyjających do liczby wszystkich zdarzeń.

Zadania prostsze

Zadanie 1.1 *Losujemy 2 kule spośród c czerwonych i b białych. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kul różnych kolorów?*

Odp. Modelujemy zbiór kul jako $K = \{C_1, \dots, C_c, B_1, \dots, B_b\}$. Przestrzeń wszystkich zdarzeń:

Losowanie bez zwracania, kule nie mogą być te same

$$\Omega = \{\{x, y\} \subseteq K : x \neq y\}$$

a przestrzeń zdarzeń sprzyjających:

$$A = \{\{C_i, B_j\} : C_i, B_j \in K\}.$$

Moc tych zbiorów:

$$|\Omega| = \binom{c+b}{2} = (c+b)(c+b-1)/2 \qquad |A| = \binom{c}{1}\binom{b}{1},$$

oraz ostatecznie

$$P(A) = \frac{2cb}{(c+b)(c+b-1)}.$$

Przybliżenia:

- dla małego c możemy napisać $P(A) \approx \frac{2cb}{b(b-1)}$, a przy $b \to \infty$: $P(A) \to 0$,
- dla $c = b$: $P(A) = \frac{b^2}{b(2b-1)} = \frac{1}{2-\frac{1}{b}}$ co dla $b \to \infty$: $P(A) \to \frac{1}{2}$,
- dla ustalonego $c + b$ prawdopodobieństwo jest tym większe, im bliżej siebie są c i b.

Zadanie 1.2 *90-osobowy rocznik został podzielony losowo na 3 równoliczne potoki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Jaś i Małgosia znajdą się w tym samym potoku?*

Odp. Modelujemy Ω jako funkcje z $\{1, \dots, 90\}$ w $\{1, \dots, 3\}$ spełniające odpowiedni warunek, a przez A ilość ustawień spełniających treść zadania. Wtedy

Można też łatwiej: najpierw wstawiamy Jasia w losowe miejsce (Jaś jest przydzielony do jakiegoś potoku automatycznie), zatem dla Małgosi zostaje 29 miejsc w tym potoku na 89 wszystkich możliwych i dostępnych dla niej.

$$|\Omega| = \binom{90}{30} \cdot \binom{60}{30} \cdot \binom{30}{30} \qquad |A| = 3 \cdot \binom{88}{28} \cdot \binom{60}{30} \cdot \binom{30}{30}.$$

Zatem prawdopodobieństwo:

$$P(A) = \frac{3 \cdot \frac{88!}{28!60!} \cdot \frac{60!}{30!30!}}{\frac{90!}{60!30!} \cdot \frac{60!}{30!30!}} = 3 \cdot \frac{88!}{90!} \cdot \frac{30!}{28!} = \frac{3 \cdot 30 \cdot 29}{90 \cdot 89} = \frac{29}{89}.$$

Zadanie 1.3 *Jakie jest prawdopodobieństwo, że w losowym ustawieniu n wież na szachownicy $n \times n$ żadne 2 wieże się nie atakują?*

Odp. Wszystkich możliwych ustawień n wież na n^2 polach jest

$$|\Omega| = \binom{n^2}{n}.$$

Niech zdarzenie A - żadna z n wież nie może bić innej. Rozważmy pierwszą kolumnę szachownicy: możemy postawić na niej wieżę na n sposobów. W kolejnej kolumnie możemy ją postawić na $n-1$ sposobów, ponieważ musimy uniknąć rzędu, na którym postawiliśmy wieżę w pierwszej kolumnie. W n-tej kolumnie mamy tylko jedną możliwość. Moglibyśmy jeszcze obrócić szachownicę i przeprowadzić podobne rozumowanie jeszcze raz, ale wszystkie rozwiązania się powtórzą. Zatem

$$|A| = n!.$$

Ostatecznie

$$P(A) = \frac{n!}{\binom{n^2}{n}} = \frac{n!}{\frac{n^2!}{n!(n^2-n)!}} = \frac{(n!)^2(n^2-n)!}{n^2!}$$

Cieżko już tą postać jakoś uprościć

Zadanie 1.4 *Rozdajemy 7 kart ze standardowej talii 52 kart. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wśród tych kart są:*

a) *dokładnie 3 asy?*

b) *dokładnie 2 króle?*

c) *dokładnie 3 asy lub dokładnie 2 króle?*

Odp. Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω to wszystkie możliwości wyciągnięcia 7 kart z talii, zatem $|\Omega| = \binom{52}{7}$. Dla poszczególnych przypadków liczba zdarzeń sprzyjających $|A|$ wynosi

a) $|A| = \binom{4}{3}\binom{48}{4}$

b) $|A| = \binom{4}{2}\binom{48}{5}$

c) $|A| = \binom{4}{3}\binom{48}{4} + \binom{4}{2}\binom{48}{5} - \binom{4}{3}\binom{4}{2}\binom{44}{2}$

odejmujemy część wspólną, np. przypadek że po wyciągnięciu 3 asów wśród 4 kart były 2 króle.

Zadanie 1.5 *Rzucamy trzema kostkami. Sumy 11 i 12 można uzyskać na tyle samo sposobów. Czy są one równie prawdopodobne?*

Odp. Jeśli kostki są nierozróżnialne obie sumy wypadają na 6 sposobów :

$$11 = 6+4+1 = 6+3+2 = 5+5+1 = 5+4+2 = 5+3+3 = 4+4+3$$
$$12 = 6+5+1 = 6+4+2 = 6+3+3 = 5+5+2 = 5+4+3 = 4+4+4.$$

Jednak jeśli kostki są rozróżnialne, to 11 wypada na 27 sposobów, a 12 na 25. Trzeba uważać, by dobrze dobrać przestrzeń probabilistyczną. W przypadku 11 mamy:

- 3 trójki niepowtarzających się liczb $\{(6,4,1),(6,3,2),(5,4,2)\}$ i
- 3 trójki z jednym powtórzeniem $\{(5,5,1),(5,3,3),(4,4,3)\}$.

Jeśli mamy rozróżnialne kostki to dla niepowtarzających się liczb mamy 3! kombinacji dla każdej (w sumie 18); np. 6 możemy postawić na 3 miejscach, 4 na dwóch i 1 już tylko na jednym, czyli $3 \cdot 2 = 3!$. Dla jednego powtórzenia mamy $\frac{3!}{2!}$ kombinacji dla każdej trójki (w sumie 9); np. 1 stawiamy na 3 sposoby w szeregu, a 5 już są ustawione automatycznie. Zatem wszystkich kombinacji jest 27.

W przypadku 12 mamy:

- 3 trójki nie powtarzające się,
- 2 trójki z jednym powtórzeniem i
- jedną trójkę tych samych liczb $\{4, 4, 4\}$.

Tą ostatnią można wybrać tylko na jeden sposób na rozróżnialnych kostkach, zatem mamy dwie możliwości mniej niż w przypadku 11.

Przestrzeń zdarzeń w obu przypadkach to $|\Omega| = 6^3$.

Zadanie 1.6 *Jaś i Małgosia rzucają monetami: Jaś rzuca n razy, a Małgosia n + 1 razy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że Małgosi wypadnie więcej orłów niż Jasiowi?*

Odp. Sposób sprytnego zrobienia tego zadania:

Ta gra jest równoważna po prostu jednemu rzutowi monetą

Albo Małgosia ma więcej orłów, albo więcej reszek. Nazwijmy dobrym wynikiem orła Małgosi albo reszkę Jasia. Pytanie jest równoważne temu, czy z $2n + 1$ rzutów dostaniemy większość dobrych. Rozpatrzmy chwilę przed ostatnim rzutem Małgosi. Jeśli Małgosia wygrywała, to zdarzenie na pewno zajdzie. Jeśli przegrywała, to na pewno nie zajdzie. Jeśli remisowała, to zajdzie z prawdopodobieństwem 1/2. W każdym z powyższych pomysłów z symetrii dostajemy wynik 1/2.

Zadania trudniejsze

Zakładamy dla uproszczenia, że w populacji nie ma osób urodzonych 29 lutego, jak również rodzeństw bliźniaczych. Zakładamy też, że urodzenie się w każdy spośród 365 dni roku jest tak samo prawdopodobne.

Zadanie 1.7 *W klasie jest n osób. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że pewne dwie osoby mają urodziny tego samego dnia? Jak duże musi być n, aby to prawdopodobieństwo było większe niż $\frac{1}{2}$?*

Odp. Niech n oznacza liczbę osób w danej grupie, gdzie $n \leq 365$ (ponieważ będziemy liczyć prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego, najgorszym przypadkiem jest wtedy taki, gdy wszyscy mają urodziny innego dnia. Dla $n \geq 365$ na pewno co najmniej dwie osoby mają urodziny tego samego dnia i zadanie staje się trywialne). Dni w roku również ponumerujmy od 1 do 365. Przestrzeń wszystkich zdarzeń ma postać:

$$\Omega_n = \{(o_1, \dots, o_n),\ \text{gdzie } o_i \in \{1, \dots, 365\}, i = 1, \dots, n,\ \text{z powtórzeniami}\},$$

gdzie o_i to numer dnia urodzin i-tej osoby. W danej grupie osób mamy dwa możliwe wzajemnie wykluczające się, a zarazem dopełniające się zdarzenia:

$$\begin{aligned} &A_n - \text{zdarzenie, że przynajmniej dwie osoby mają urodziny w ten sam dzień.} \\ &A_n^c - \text{zdarzenie, że każda osoba w grupie obchodzi urodziny w innym dniu.} \end{aligned}$$

Łatwiej jest obliczyć prawdopodobieństwo drugiego zdarzenia.

$$A_n^c = \{(o_1, \dots, o_n) \in \Omega : o_i \text{ są różne dla różnych } i = 1, \dots, n\}$$

Szukamy takiego n, dla którego $P(A) > 0.5$, lub równoważnie, $P(A^c) < 0.5$. Mamy

$$|A_n^c| = \prod_{k=0}^{n-1}(365 - k) = \frac{365!}{(365-n)!}, \qquad |\Omega_n| = 365^n$$

$$P(A_n^c) = \frac{|A_n^c|}{|\Omega_n|} = \frac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^n} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \ldots \left(1 - \frac{n-1}{365}\right)$$

Szukamy takiego $n, n \in \langle 0, 365\rangle$, żeby:

$$P(A_n^c) = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \ldots \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) < 0.5$$

Możemy poszukiwać najmniejsze n, które spełnia powyższy warunek, ponieważ $\forall_n\ P(A_{n+1}^c) = P(A_n^c) \cdot \left(1 - \frac{n}{365}\right)$, a stąd jeżeli $P(A_n^c) < 0.5$ dla pewnego n, to także $\forall_{n_2 > n}\ P(A_{n_2}^c) < 0.5$. Skorzystamy z przybliżenia $1 - x \approx e^{-x}$ dla małych x. Otrzymujemy:

Z rozwinięcia Taylora mamy $e^x \approx 1 + x$ dla małych x

$$P(A_n^c) \approx e^{-\frac{1}{365}} \cdot e^{-\frac{2}{365}} \cdot \ldots \cdot e^{-\frac{n-1}{365}} = e^{-\frac{1+2+\ldots+(n-1)}{365}} = e^{-\frac{(n-1)n}{2*365}} < 0.5$$

$$-\frac{(n-1)n}{2 \cdot 365} < \ln\frac{1}{2}$$

$$(n-1)n > 2 \cdot 365 \cdot \ln 2$$

$$n^2 - n - 2 \cdot 365 \cdot \ln 2 > 0$$

Rozwiązujemy nierówność kwadratową: $\Delta = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 365 \cdot \ln 2 \approx 2024.99$, a co za tym idzie:

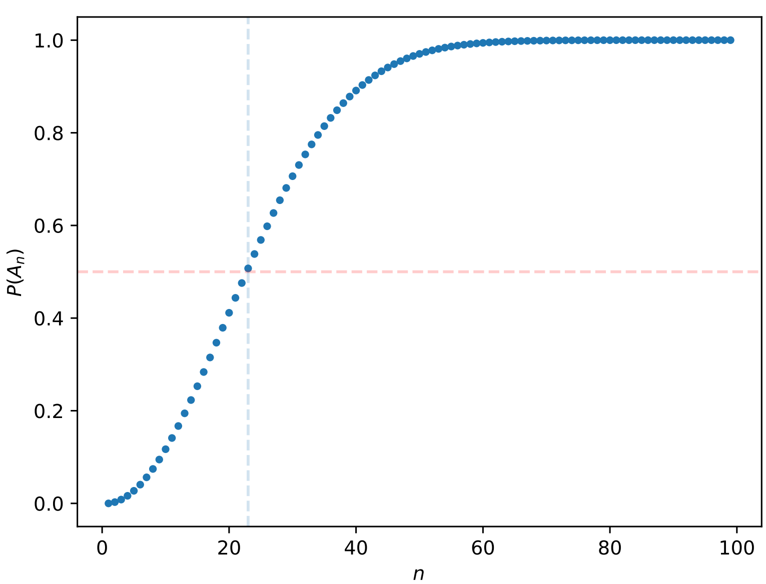
$$n_1 = \frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2} \approx 22.49 \quad n_2 < 0.$$

Istotnie mamy $P(A_{22}^c) \approx 0.5243$ i $P(A_{23}^c) \approx 0.4927$. Zatem z powyższych rozważań wynika, że wystarczą 23 osoby, aby prawdopodobieństwo tego, że co najmniej dwie osoby z nich mają urodziny tego samego dnia w roku, było większe niż 0.5.

A jak wyglądają prawdopodobieństwa tego zdarzenia w przypadku większej liczby osób? Weźmy $n = 23, 30, 50$.

$$P(A_{23}) = 1 - P(A_{23}^c) = 0.5073$$
$$P(A_{30}) = 1 - P(A_{30}^c) = 0.7063$$
$$P(A_{50}) = 1 - P(A_{50}^c) = 0.9704$$

Jak widzimy, prawdopodobieństwo zdarzenia A_n szybko rośnie (patrz Rys. 1). W grupie 50 osobowej jest niewiele mniejsze od 1. Pozornie wydaje się to być mało możliwe, ale zakładając się z kimś o to, że dwie osoby z takiej grupy mają urodziny w ten sam dzień, mamy niemalże 100 procent szans na zwycięstwo.



Rysunek 1: Prawdopodobieństwo zdarzenia A_n w zależności od n

Zadanie 1.8 *10 osób wsiadło na parterze 10-piętrowego budynku do pustej windy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że każda wysiądzie na innym piętrze? (Zakładamy, że każdy układ wysiadających jest równie prawdopodobny)*

Odp. Liczba wszystkich kombinacji to $|\Omega| = 10^{10}$, czyli każda z 10-ciu osób może wysiąść na każdym z 10-ciu pięter. Sprzyjających przypadków mamy $|A| = \prod_{k=0}^{9}(10-k) = 10!$. Zatem

$$P(A) = \frac{10!}{10^{10}} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{10}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{10}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{9}{10}\right).$$

Możemy użyć przybliżenia $1 - x \approx e^{-x}$. Otrzymamy ostatecznie

To jest bardzo grube oszacowanie, ale lepiej to niż nic

$$P(A) \approx e^{-\frac{1}{10}} \cdot \ldots \cdot e^{-\frac{9}{10}} = e^{-\frac{9\cdot 10}{2\cdot 10}} = e^{-4.5}.$$

Łatwo zauważyć, że dla większej liczby pięter, to prawdopodobieństwo maleje eksponencjalne.

Zadanie 1.9 *Przyjmijmy, że mamy szansę spotkać w życiu n kobiet - potencjalnych kandydatek na żonę (ew. mężczyzn - kandydatów na męża). Każdą z kandydatek możemy porównać do każdej z wcześniejszych kandydatek (biorąc pod uwagę wiek, charakter, poczucie humoru, urodę etc). Jeśli nie wybierzemy danej kandydatki to już więcej jej nie zobaczymy. Naszym celem jest opracowanie strategii, która maksymalizuje prawdopodobieństwo wyboru najlepszej kandydatki. Ograniczymy się przy tym do strategii następującej postaci:*

Jest bardzo fajny filmik na YT na kanale Numberfile, który bardzo dobrze tłumaczy ten problem. Polecam!

- *odrzuć $k-1$ pierwszych kandydatek, a następnie*
- *wybierz pierwszą kandydatkę lepszą od wszystkich wcześniejszych.*

W tym zadaniu nie musisz dowodzić, że optymalna strategia ma taką właśnie postać, choć z pewnością warto się nad tym zastanowić. Twoim zadaniem jest ustalenie:

- *Jakie prawdopodobieństwo sukcesu gwarantuje ta strategia?*
- *Jaka jest optymalna wartość parametru k i jakie prawdopodobieństwo sukcesu odpowiada tej wartości?*

Odp. Kandydatki numerujemy od $1, \ldots, n$; 1 jest najlepsza, n-ta – najgorsza. Wszystkich permutacji kandydatek jest $|\Omega| = n!$. Zdefiniujmy zdarzenie:

$$A_i = \{w : w(i) = 1\}$$

jako takie które oznacza, że najlepsza kandydatka przyszła jako i-ta. Podobnie definiujmy

$$A_{ij} = A_i \cap \{w : w(j) \text{ jest najmniejsza spośród } w(1), \ldots, w(i-1)\}$$

jako zdarzenie, w którym najlepsza kandydatka przyszła jako i-ta, a najlepsza spośród tych przed nią była na miejscu j. Zatem zdarzenie "w powyższej strategii (zależnej od k) wybierzemy najlepszą kandydatkę"możemy zapisać następująco

$$A = \bigcup_{i \geq k} \bigcup_{j<k} A_{ij}.$$

Żeby strategia dobrze działała, najlepsza kandydatka (i-ta) nie może zostać zbyt wcześnie poznana i odrzucona, a więc musi być wśród kandydatek poznanych od k do n. Prawdopodobieństwa tych zdarzeń wynoszą

$$P(A_i) = \frac{1}{n} \qquad P(A_{ij}) = \frac{1}{n(i-1)}$$

$$P(A) = \sum_{k \leq i \leq n} \sum_{j<k} \frac{1}{n} \frac{1}{i-1} = \frac{1}{n}(k-1) \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i-1}$$

Oznaczmy teraz przez $H_n = \sum_{x=1}^{n} \frac{1}{x}$. Wtedy możemy napisać

$$P(A) = \frac{k-1}{n}\left(H_{n-1} - H_{k-2}\right) = \frac{k-1}{n}\left(H_n - H_{k-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{k-1}\right)$$

Użyjemy przybliżenia $H_n = \sum_{x=1}^{n} \sim \int_1^n \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln n$. Dodatkowo dla $n \to \infty$ oraz $k-1 = \alpha n$ możemy zapisać

$$P(A) \approx \frac{\alpha n}{n}\left(\ln n - \ln \alpha n - 0 + 0\right) = \alpha \ln \frac{1}{\alpha} = -\alpha \ln \alpha$$

Maksimum otrzymamy gdy

$$\frac{\mathrm{d}P(A)}{\mathrm{d}\alpha} = 0 \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(-\alpha \ln \alpha\right) = -\ln \alpha - \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = -\ln \alpha - 1 = 0$$

Zatem minimum będzie dla $\alpha = \frac{1}{e}$. Wtedy

$$P(A) = -\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \approx 0.368.$$

Zatem używając tej strategii mamy prawie 37% szans na to, że w losowym ciągu kandydatek znajdziemy najlepszą z nich. Całkiem imponujące!

---

2 Prawdopodobieństwo warunkowe

Prawdopodobieństwo warunkowe, wzór iloczynowy

Definicja (Prawdopodobieństwo warunkowe) Niech A, B - zdarzenia losowe. Prawdopodobieństwo warunkowe

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

A i B są niezależne, gdy $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.

Zadanie 2.1.1 *Wybrano losowo jedną z trzech kartek, pomalowanych z obu stron: czarno-czarnej, czarno-białej i biało-białej, a następnie wybrano losowo jedną z jej stron. Jeśli ta strona jest czarna, to jakie jest prawdopodobieństwo tego, że druga też jest czarna?*

Odp. Zbiór Ω ma 6 elementów. Niech A - wylosowaliśmy czarno-czarną, B - widzimy czarną stronę. Liczymy $P(A|B)$. Wtedy $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ oraz $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Odpowiedź: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3}$.

Zadanie 2.1.2 *Wybieramy losowo numer z książki telefonicznej i pod niego dzwonimy. Osobę, która odbierze pytamy o to, czy ma dwójkę dzieci, a jeśli okaże się, że tak, to:*

- *pytamy, czy ma syna. Jeśli okaże się, że tak, to jakie jest prawdopodobieństwo tego, że drugie dziecko też jest synem?*
- *pytamy, czy któreś z dzieci ma na imię Jaś. Jeśli okaże się, że tak, to jakie jest prawdopodobieństwo tego, że drugie dziecko też jest synem?*

Uwaga*: W tym zadaniu trzeba oczywiście przyjąć pewne założenia co do częstości urodzin chłopców/dziewczynek oraz sposobu w jaki nadawane są im imiona.*
Uwaga 2: *zadanie ma nieco zmodyfikowaną treść w porównaniu do oficjalnej wersji*

Odp.

- Niech A - ma dwóch synów, oraz B - ma przynajmniej jednego syna. Przestrzeń $\Omega = (s,s), (s,c), (c,s), (c,c)$, to wszystkie możliwe pary dwóch dzieci. Zatem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

- Niech A - ma dwóch synów, oraz B - ma przynajmniej jednego syna Jasia. Tutaj już nie tak łatwo zbudować Ω bo trzeba by wziąć pod uwagę wszystkie imiona. Załóżmy, że z prawd. p rodzice nazywają syna Jaś. Zatem

$$P(B) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \cdot p\right)^2 = p - \frac{1}{4}p^2 \qquad P(A \cap B) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot p \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot p \cdot \frac{1}{2} \cdot p = \frac{p}{2} - \frac{p^2}{4},$$

ponieważ dla B wybieramy wszystko oprócz dwóch nie-Jasiów, a dla $A \cap B$ bierzemy pary (Jaś, syn) oraz (syn, Jaś) oraz odejmujemy powtórkę (Jaś, Jaś). Ostatecznie

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{p}{4}}{1 - \frac{p}{4}} = \frac{2-p}{4-p} = 1 - \frac{2}{4-p}.$$

Widać, że dla $p \longrightarrow 0$ mamy $P(A|B) \longrightarrow \frac{1}{2}$, co oznacza, że jeśli Jaś jest mało popularnym imieniem, to płeć drugiego dziecka jest równie prawdopodobna (dlaczego?). Natomiast dla $p = 1$ otrzymamy $P(A|B) = \frac{1}{3}$ czyli dokładnie to samo co w podpunkcie wyżej.

Zadanie 2.1.3 *Na inżynierii oprogramowania 16 studentów ma być podzielonych na 4 równe zespoły. Wśród nich jest 4 pracujących, z doświadczeniem w projektowaniu dużych systemów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każdy z nich trafi do innej grupy?* ***Uwaga****: Nie rozwiązuj tego zadania wprost ze schematu klasycznego. Zamiast tego użyj pojęcia prawdopodobieństwa warunkowego.*

Odp. Niech P_i oznacza zdarzenie, że doświadczeni studenci od 1 do i trafili do różnych grup.

$$P(P_4) = P(P_4 \cap P_3 \cap P_2 \cap P_1) = P(P_4|P_3 \cap P_2 \cap P_1) \cdot P(P_3 \cap P_2 \cap P_1) =$$
$$\frac{4}{13} \cdot P(P_3|P_2 \cap P_1) \cdot P(P_2 \cap P_1) = \frac{4}{13} \cdot \frac{8}{14} \cdot P(P_2|P_1) \cdot P(P_1) = 1 \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{12}{15}$$

$\frac{4}{13}$ bierze się stąd, że ostatni student ma cztery miejsca w "dobrej" grupie a wolnych miejsc jest 13. Podobnie pozostałe liczby.

Wzór na prawdopodobieństwo całkowite

Definicja (Prawdopodobieństwo całkowite) Niech $A, B_1, B_2, \ldots, B_n$ - zdarzenia losowe, zdarzenia B_i dla $i = 1, \ldots, n$ tworzą podział Ω, czyli zawsze zachodzi dokładnie jedno z nich. Wówczas

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\, P(B_i).$$

Zadanie 2.2.1 *Grasz w turnieju szachowym, w którym z 50% graczy masz szansę wygrania 30%, z 25% graczy szansę 40% i z 25% graczy szansę 50%. Pierwszą partię rozgrywasz z losowym przeciwnikiem. Jakie są twoje szanse wygrania?*

Odp. Oznaczmy zdarzenia polegające na tym, że zagramy z poszczególnymi graczami przez A, B, C. Wiemy, że $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{4}, P(C) = \frac{1}{4}$.
W to zdarzenie polegające na wygranej: $P(W|A) = \frac{3}{10}, P(W|B) = \frac{4}{10}, P(W|C) = \frac{5}{10}$. Zatem z twierdzenia o prawd. całkowitym (bo A, B, C dzielą Ω):

$$P(W) = P(A) \cdot P(W|A) + P(B) \cdot P(W|B) + P(C) \cdot P(W|C) = 0.375$$

Zadanie 2.2.2 *W urnie są dwie kule: biała i czarna. $(n-2)$-krotnie losujemy kulę z urny, po czym wrzucamy ją z powrotem wraz z drugą kulą tego samego koloru. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że po zakończeniu losowań wśród n kul dokładnie k jest białych?*

Odp. Niech $P(n, k)$ – prawdopodobieństwo k białych wśród n kul. Warunek początkowy to $P(2, 1) = 1$. Popatrzmy na kilka pierwszych możliwości w tym losowaniu:

$$\begin{tikzcd}
 & & P(4,1) = \frac{1}{3} \\
 & P(3,1) = \frac{1}{2} \arrow[ur, "\mathrm{c}"] \arrow[dr, "b"'] & \\
P(2,1) = 1 \arrow[ur, "\mathrm{c}"] \arrow[dr, "b"'] & & P(4,2) = \frac{1}{3} \\
 & P(3,2) = \frac{1}{2} \arrow[ur, "\mathrm{c}"] \arrow[dr, "b"'] & \\
 & & P(4,3) = \frac{1}{3}
\end{tikzcd}$$

Patrząc na drzewko można zauważyć, że

$$P(n, k) = P(n-1, k-1) \cdot \frac{k-1}{n-1} + P(n-1, k) \cdot \frac{n-k-1}{n-1}.$$

Używając indukcji (po n) zakładając że $P(n, k) = \frac{1}{n-1}$ (co też można zobaczyć na drzewku powyżej):

$$P(n, k) = \frac{1}{n-2} \cdot \frac{k-1}{n-1} + \frac{1}{n-2} \cdot \frac{n-k-1}{n-1} = \frac{k-1+n-k-1}{(n-1)(n-2)} = \frac{1}{n-1},$$

czyli $P(n, k) = \frac{1}{n-1}$ jest rozwiązaniem. Ciekawe jest to, że to prawdopodobieństwo nie zależy od k, zatem każda liczba białych kul w urnie jest tak samo prawdopodobna.

Zadanie 2.2.3 *Mamy n urn. W i-tej urnie znajduje się $i-1$ kul białych i $n-i$ kul czarnych. Wybieramy losowo urnę, a następnie losujemy z niej dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że są to kule różnych kolorów jeśli losujemy:*

- *bez zwracania,*

Jak to zadanie zrobić nie używając prawdopodobieństwa klasycznego, tylko prawd. całkowitego?

- *ze zwracaniem.*

Odp.

- losowanie ze zwracaniem (schemat Bernoulliego; kule są rozróżnialne)

$$|\Omega| = (n-1)^2 \quad , \quad |A| = 2 \cdot \binom{i-1}{1} \cdot \binom{n-i}{1}$$

  Czynnik 2 w $|A|$ pochodzi z faktu że kule są rozróżnialne. Najpierw wyciągam białą, a potem czarną, a potem na odwrót.

$$p_{zz} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{2(i-1)(n-i)}{(n-1)^2} = 2\frac{1}{n}\frac{1}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1)(n-i)$$

  Czynnik $\frac{1}{n}$ to prawdopodobieństwo wybrania losowej urny.

- losowanie bez zwracania (kule są nierozróżnialne)

$$|\Omega| = \binom{n-1}{2} \quad , \quad |A| = \cdot \binom{i-1}{1} \cdot \binom{n-i}{1}$$

$$p_{bz} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)(n-i)}{\binom{n-1}{2}} = \cdot\frac{1}{n}\frac{1}{\binom{n-1}{2}} \sum_{i=1}^{n} (i-1)(n-i)$$

Obliczmy sumy które występują w obu wyrażeniach:

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1)(n-i) = -\sum_{i=1}^{n} i(i-1) + n\sum_{i=1}^{n}(i-1) = -\sum_{i=1}^{n} i^{\underline{2}} + n\sum_{i=1}^{n} i^{\underline{1}} - n^2$$

gdzie $i^{\underline{k}} = (i) \cdot \ldots \cdot (i-k+1)$ to *silnia dolna*. Możemy też użyć tożsamości ("całkowanie"w matematyce dyskretnej)

$$\sum_{i=1}^{n} i^{\underline{k}} = \frac{1}{k+1}(n+1)^{\underline{k+1}}$$

Ostatecznie otrzymamy:

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1)(n-i) = -\frac{1}{3}(n+1)\cdot n \cdot (n-1) + n \cdot \frac{1}{2}(n+1) \cdot n - n^2 =$$

$$-\frac{1}{3}(n+1)\cdot n\cdot(n-1)+n^2\left(\frac{1}{2}(n+1)-1\right) = -\frac{1}{3}(n+1)\cdot n\cdot(n-1)+n^2\left(\frac{1}{2}(n-1)\right) = n(n-1)\left\{\frac{n}{2} - \frac{n+1}{3}\right\} =$$

$$n(n-1)\left\{\frac{3\cdot n - 2n - 2}{6}\right\} = \frac{1}{6}\cdot n(n-1)(n-2)$$

Zatem

$$p_{zz} = 2\frac{1}{n}\frac{1}{(n-1)^2}\frac{1}{6}n(n-1)(n-2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{n-2}{n-1}$$

$$p_{bz} = \frac{1}{n}\frac{1}{\binom{n-1}{2}}\frac{1}{6}n(n-1)(n-2) = \frac{1}{3}$$

Twierdzenie Bayesa

Twierdzenie Bayesa Niech $A, B_1, B_2, \dots, B_n$ - zdarzenia losowe, zdarzenia B_i dla $i = 1, \dots, n$ tworzą podział Ω, czyli zawsze zachodzi dokładnie jedno z nich. Wówczas

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)\,P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\,P(B_i)}.$$

Zadanie 2.3.1 *Gracz w teleturnieju wybiera jedną z 3 zasłon. Za jedną z zasłon jest ukryty samochód, za pozostałymi nic nie ma. Prowadzący odsłania jedną z pozostałych dwóch zasłon i pokazuje, że niczego za nią nie ma, po czym daje graczowi szansę na zmianę wyboru.*

- *Czy gracz powinien zmienić swój wybór?*
- *Jakie maksymalne prawdopodobieństwo sukcesu może uzyskać?*
- *Jak zmieni się sytuacja, jeśli zasłon jest 100, a prowadzący odsłania wszystkie poza wskazaną przez gracza i jedną inną?*

Uwaga*: Przeanalizowanie konkretnej sytuacji opisanej w zadaniu jest istotnie bardziej skomplikowane niż porównanie strategii "zawsze zmieniaj"ze strategią "nigdy nie zmieniaj". Czy widzisz dlaczego?*

Odp. Wybieramy jedną z N bramek. Mamy $\frac{1}{N}$ szans na wygranie. Jeśli zostaną zamknięte $N-2$ bramki (oprócz naszej wybranej i jednej innej) to wiemy, że samochód jest za jedną z tych dwóch. Mamy w takim razie dwie sytuacje

- z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{N}$ za naszą bramką jest samochód. W tej sytuacji zmiana bramki powoduje że z prawdopodobieństwem 1 przegramy.
- z prawdopodobieństwem $p = \frac{N-1}{N}$ za naszą bramką jest koza, więc wtedy jeśli zmienimy to z prawdopodobieństwem 1 wygramy

Zatem w strategii, w której zawsze zmieniamy bramkę mamy prawdopodobieństwo $p = \frac{N-1}{N}$ że wygramy.

Można też to policzyć z Bayesa: załóżmy, że gracz wskazuje bramkę numer 1. Niech A_i to zdarzenie, że samochód jest za bramką i, B_i to zdarzenie, że prowadzący odsłania bramkę i.

$$P(B_2|A_1) = \frac{1}{2} \quad P(B_3|A_1) = \frac{1}{2} \quad P(B_2|A_3) = 1 \quad P(B_3|A_2) = 1.$$

$$P(A_1|B_2) = \frac{P(B_2|A_1)}{P(B_2|A_1) + P(B_2|A_3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$
$$P(A_3|B_2) = \frac{P(B_2|A_3)}{P(B_2|A_1) + P(B_2|A_3)} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Zadanie 2.3.2 - kontynuacja zadania 1 z poprzedniej serii *Przypuśćmy, że udało ci się wygrać pierwsza partię. Jakie jest prawdopodobieństwo, że grałeś z graczem 3-go rodzaju?*

Odp. Wiemy, z zadania 1 z listy 1, że $P(W) = \frac{3}{8}$, zatem

$$P(C|W) = \frac{P(W|C)P(C)}{\sum_i P(W|B_i)P(B_i)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3}$$

Zadanie 2.3.3 *Mamy do dyspozycji 3 telefony. Wiemy, że jeden z nich zawsze działa, drugi nigdy nie działa (ale zjada monety), a trzeci działa z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{2}$ (w pozostałych przypadkach zjada monety). Próbujemy zadzwonić z jednego z automatów i zjada on monetę. Zmieniamy automat i udaje nam się zadzwonić. Próbujemy raz jeszcze (nie zmieniając telefonu) i znów się udaje. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że telefon z którego zadzwoniliśmy 2 razy jest tym, który zawsze działa? Czy odpowiedź zmieniłaby się, gdyby nie było w zadaniu pierwszej (nieudanej) próby?*

Odp. Wiemy, że T_1 zawsze działa, T_2 działa nigdy oraz T_3 działa z $p = \frac{1}{2}$. Niech A to zdarzenie opisane w zadaniu, mianowicie wybieramy automat, on zjada monetę, zmieniamy automat i dzwonimy dwa razy). Są tylko trzy takie pary telefonów, które mogą spełnić ten warunek:

- $T_2 \to T_1$ z prawd. $P(A|T_2 \to T_1) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{6}$
- $T_2 \to T_3$ z prawd. $P(A|T_2 \to T_3) = \frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{24}$
- $T_3 \to T_1$ z prawd. $P(A|T_3 \to T_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{12}$

Teraz chcemy policzyć prawdopodobieństwo tego, że skończyliśmy na telefonie T_1 wiedząc, że spełniliśmy warunki zadania

$$P(\cdot \to T_1|A) = \frac{P(A|\cdot \to T_1)P(\cdot \to T_1)}{\sum_i P(A|\cdot \to T_i)P(\cdot \to T_i)} = \frac{\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right) \cdot \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right) \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{6}{24}}{\frac{7}{24}} = \frac{6}{7}.$$

Skorzystaliśmy z tego, że zakończenie na każdym telefonie jest równie prawdopodobne, $P(\cdot \to T_i) = \frac{1}{3}$.

Zadanie 2.3.4 *W sejmie mamy dwie partie. Posłowie partii A nigdy nie zmieniają zdania na żaden temat, a każdy z posłów partii B zmienia zdanie na temat głosowanej ustawy pomiędzy dwoma jej głosowaniami z prawdopodobieństwem p. Wiadomo, że posłowie partii A stanowią frakcję f wszystkich posłów, pozostali pochodzą z partii B. Obserwujemy losowego posła i głosuje on w ten sam sposób w dwóch kolejnych głosowaniach. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pochodzi on z partii A?*

Odp. Niech A to zdarzenie wylosowania posła z partii A, a B - z partii B, oraz C - to zdarzenie, że (wybieramy posła) i (nie zmienia on zdania w 2 głosowaniach). Wtedy Z Bayesa

$$P(A|G) = \frac{P(G|A)P(A)}{P(G|A)P(A) + P(G|B)P(B)} = \frac{1 \cdot f}{f + (1-p)(1-f)}.$$

Zadanie 2.3.5 *Danych jest $N+1$ urn. W i-tej urnie znajduje się i kul białych oraz $N-i$ kul czerwonych, dla $i = 0, \ldots, N$. Wybieramy losowo urnę, a następnie n-krotnie losujemy z wybranej urny jedną kulę ze zwracaniem. Przypuśćmy, że za każdym razem była to kula czerwona. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że kolejna kula wylosowana z tej urny też będzie czerwona? **Uwaga**: Laplace użył tego rozumowania do argumentowania na temat prawdopodobieństwa tego, że słońce następnego dnia wzejdzie na podstawie tego, że wzeszło odpowiednio wiele razy wcześniej. Co sądzisz o tym "zastosowaniu"?*

Odp.
Niech U_i to wybranie i-tej urny, a R_j - do j-tej próby losujemy ciągle czerwoną kulę. Możemy zapisać:

$$P(R_k|U_i) = \left(\frac{i}{N}\right)^k.$$

My chcemy policzyć;

$$P(R_{n+1}|R_n) = \frac{P(R_{n+1} \cap R_n)}{P(R_n)} = \frac{P(R_{n+1})}{P(R_n)}.$$

Z prawd. całkowitego

$$P(R_k) = \sum_{i=1}^{k} P(R_k|U_i)P(U_i) = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{i}{N}\right)^k \cdot \frac{1}{N+1}.$$

Ostatecznie

$$P(R_{n+1}|R_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{i}{N}\right)^{n+1}}{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{N}\right)^{n}}.$$

Jeśli N jest duże, to możemy przybliżyć te sumy przez całki

$$\frac{\int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x} = \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Zatem jeśli losujemy ciągle z urny ten sam kolor, to prawdopodobieństwo, że kolejna kula będzie takiego samego koloru rośnie i zbliża się do 1. Ma to intuicyjny sens, bo o ile przeszłość nie wpływa na przyszłość (w tym zadaniu), to historia może nas utwierdzić w tym w której urnie jesteśmy.

---

3 Niezależność zdarzeń

Definicja (Zdarzenia niezależne) Zdarzenia $A, B \in \Omega$ nazywamy *niezależnymi* jeśli $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Zadanie 3.1 *Pokazać, że skończona rodzina zdarzeń niezależnych, każde o prawdopodobieństwie mniejszym niż 1, nie może pokryć całej przestrzeni zdarzeń.*

Odp. *Dowód nie wprost.*
Niech $A_1, \dots, A_n$ – skończona rodzina zdarzeń niezależnych oraz $\forall_i P(A_i) < 1$ albo alternatywnie $P(\overline{A_i}) > 0$. Wynika stąd, że $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$.
Załóżmy, że $\{A_i\}$ może pokryć Ω, czyli $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$, a zatem $P(\Omega) = 1 = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)$, ale także

$$0 = P\left(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(\overline{A_i}\right) > 0$$

Otrzymaliśmy sprzeczność z naszym założeniem.

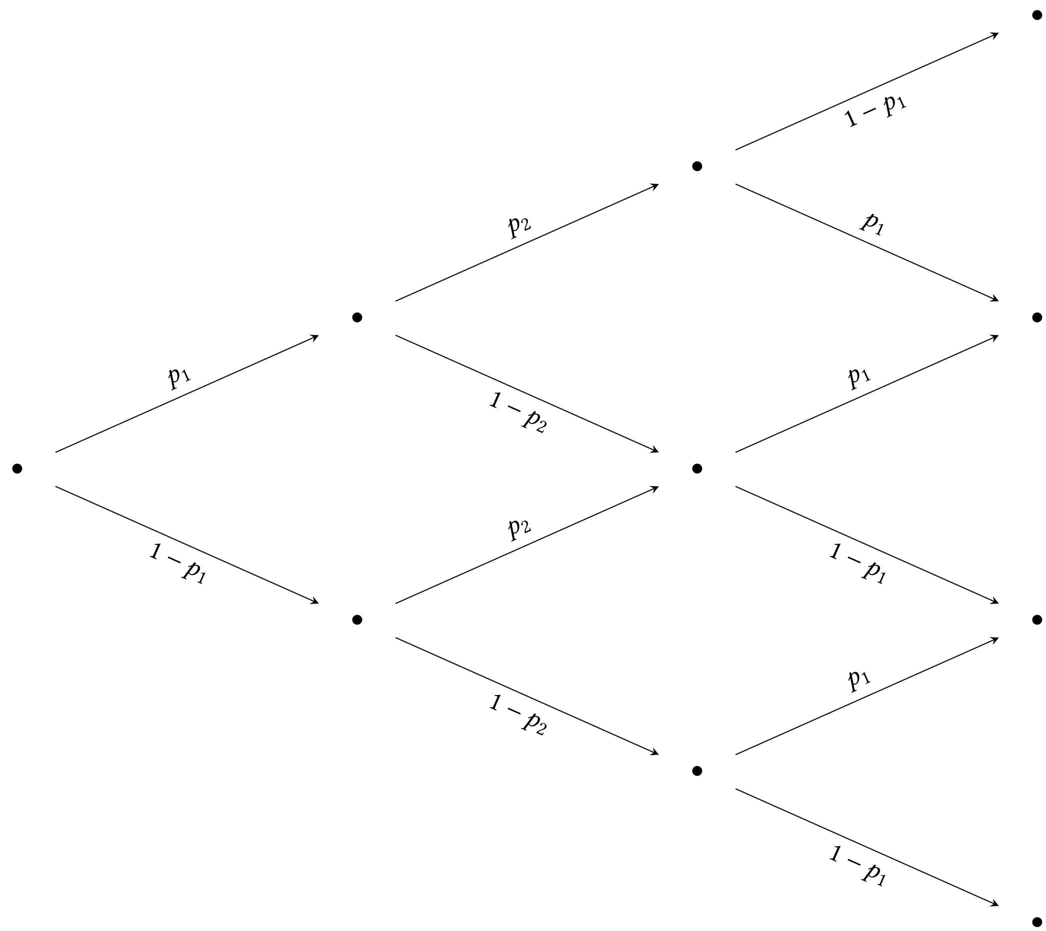
Zadanie 3.2 *Obiecującej tenisistce ojciec obiecuje nagrodę, jeśli ta wygra 2 kolejne mecze z 3 rozegranych na przemian z nim samym oraz mistrzem klubu. Szanse na wygranie pojedynczego meczu z mistrzem są mniejsze, niż ojcem. Zawodniczka może sama zdecydować, z którym przeciwnikiem zmierzy się jako pierwszym. Kogo powinna wybrać?*

Odp.
Załóżmy że p_1, p_2 są prawdopodobieństwami wygrania z osobą 1 lub 2 (może to być ojciec albo mistrz).
Zatem prawd. wygrania dwóch meczów z trzech wynosi

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot 1 + (1 - p_1) \cdot p_2 \cdot p_1 = p_1 \cdot p_2 \cdot (2 - p_1)$$

Mamy dwa możliwe scenariusze:

- najpierw gramy z ojcem (O-M-O): $p_1 = p_o$, $p_2 = p_m$, wtedy $p_A = p_o \cdot p_m \cdot (2 - p_o)$,
- najpierw gramy z mistrzem (M-O-M): $p_1 = p_m$, $p_2 = p_o$, wtedy $p_B = p_o \cdot p_m \cdot (2 - p_m)$.



Wiadomo, że $p_m < p_o$. Sprawdzamy czy $p_B > p_A$, a zatem czy $2-p_m > 2-p_o$. Czyli ponieważ $p_m < p_o$, czyli powinna zagrać najpierw z mistrzem.

To jest logiczne, jeśli zdamy sobie sprawę, że środkowy *musi* wygrać!

Zadanie 3.3 *Ekspert podejmuje prawidłową decyzję z prawd. $p_e > \frac{1}{2}$, ignorant podejmuje ją z $p_i = \frac{1}{2}$. Jaka komisja częściej podejmuje prawidłowe decyzje:*

- *składająca się z pojedynczego eksperta, czy*
- *składająca się z dwóch ekspertów i jednego ignoranta,*

jeśli decyzje podejmowane są metodą większościową? ***Uwaga:*** *W zadaniu możesz założyć, że członkowie komisji popełniają błędy niezależnie. Wyjaśnij dlaczego to założenie nie zawsze ma sens.*

Odp. Prawd. że komisja podejmie dobrą decyzję: (kolejne człony pierwszego równania) to: 1) 2 ekspertów za, ignorant przeciw; 2) ekspert i ignorant za, ekspert przeciw; 3) wszyscy za

$$p = p_e^2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot p_e \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - p_e) + p_e^2 \cdot \frac{1}{2} = p_e^2 + 2 \cdot p_e \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - p_e) = p_e$$

Prawd. że komisja podejmie dobrą decyzję jest takie samo jak pojedynczy ekspert.

Eksperci rzadko kiedy są niezależni, bo czytają te same artykuły naukowe, oraz są ludźmi czyli mogą podlegać presji tłumu

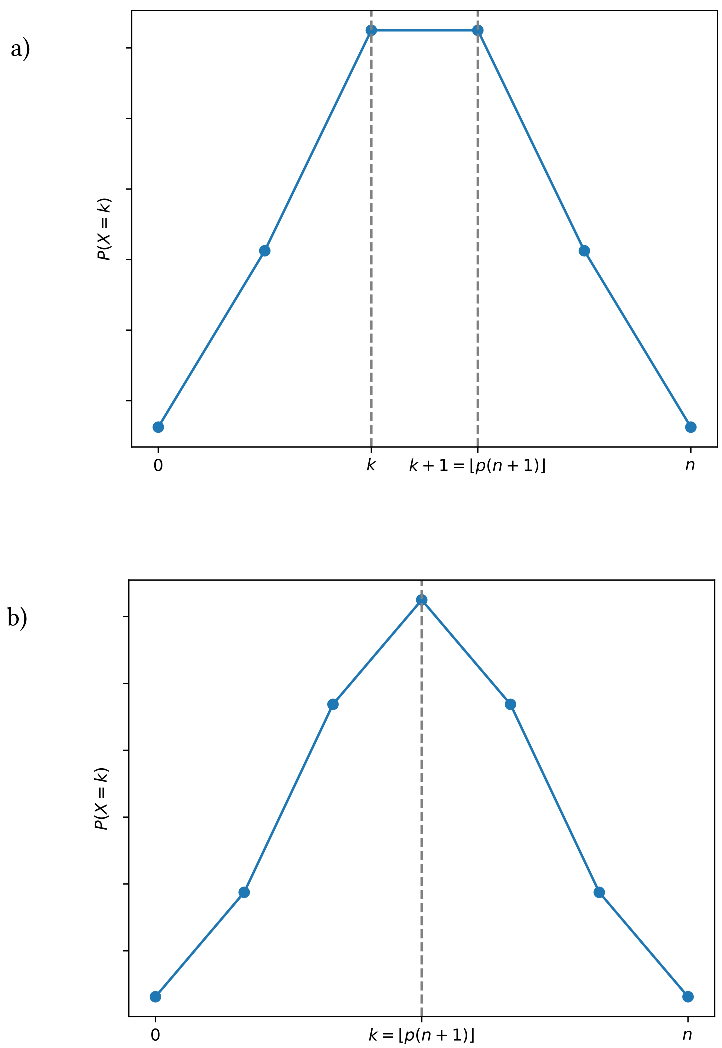
---

4 Dyskretne zmienne losowe

Rozkład dwumianowy i Poissona

Definicja (Rozkład dwumianowy) Zmienna X ma *rozkład dwumianowy z parametrami n,p* ozn. $X \sim Binom(n, p)$, jeśli $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ dla $k = 0, \ldots, n$ i $P(X = 0) = 0$ dla pozostałych k.

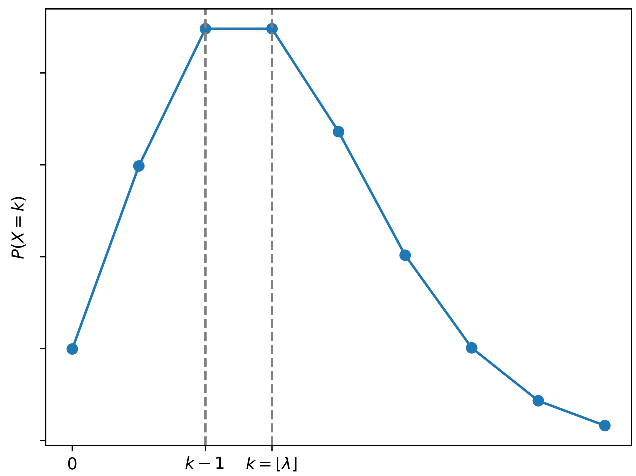
Definicja (Rozkład Poissona) Zmienna X ma *rozkład Possiona z parametrem* λ, ozn. $X \sim Poiss(\lambda)$, jeśli $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ dla $k \in \mathbb{N}$ i $P(X = k) = 0$ dla pozostałych k.



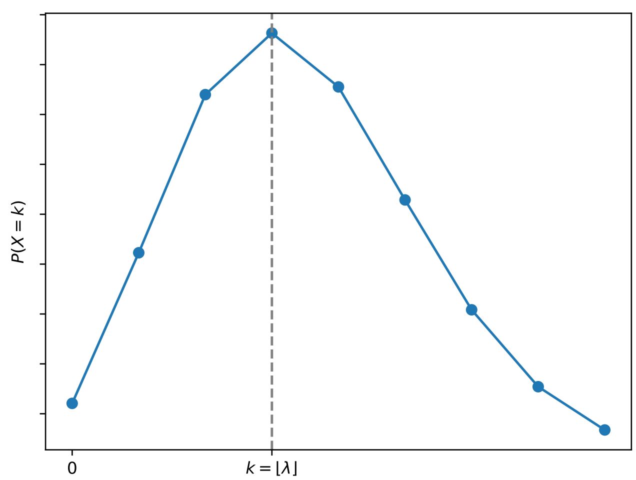
Rysunek 2: Wartości maksymalne dla rozkładu dwumianowego. a) dla wartości całkowitych $p(n + 1)$ ($p(n + 1) \in \mathbb{Z}$), są dwa maksima, w punktach $k + 1 = \lfloor p(n + 1) \rfloor$ oraz k; b) dla wartości ułamkowych $p(n + 1)$ ($p(n + 1) \notin \mathbb{Z}$) jest tylko jedno maksimum dla $k = \lfloor p(n + 1) \rfloor$.

Zadanie 4.1.1 *Rozważmy zmienną $X \sim Binom(n, p)$. Niech $K = \lfloor (n + 1)p \rfloor$. Pokazać, że $P(X = k)$ jest funkcją niemalejącą dla $k \leq K$, oraz malejącą dla $k \geq K$.*

a)



b)



Rysunek 3: Wartości maksymalne dla rozkładu Poissona. a) dla wartości całkowitych λ ($\lambda \in \mathbb{Z}$), są dwa maksima, w punktach $k = \lfloor \lambda \rfloor$ oraz $k - 1$; b) dla wartości ułamkowych λ ($\lambda \notin \mathbb{Z}$) jest tylko jedno maksimum dla $k = \lfloor \lambda \rfloor$.

Odp. Popatrzmy na iloraz prawdopodobieństw dla kolejnych wartości:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad P(X=k+1)=\binom{n}{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}.$$

Iloraz:

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}=\frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}\frac{p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{p^k(1-p)^{n-k}}\frac{(n-k)!k!}{n!}=\frac{p}{1-p}\cdot\frac{n-k}{k+1}$$

Rozkład prawd. będzie niemalejący jeśli $\frac{p}{1-p}\cdot\frac{n-k}{k+1}\geq 1$. Zatem

$$p(n-k)<(1-p)(k+1) \implies p(1+n)-1>k$$

Możemy skorzystać z funkcji *podłoga* która ma własność $x-1<\lfloor x\rfloor\leq x$ i zapisać, że funkcja jest niemalejaca dla k, które spałniają

$$\lfloor p(n+1)\rfloor\geq k$$

oraz malejąca dla pozostałych k. Zatem podsumowując:

- $p(1+n)-1<k$ – f. malejąca
- $p(1+n)-1>k$ – f. rosnąca
- $p(1+n)-1=k$ – jeśli $P(X=k)=P(X=k+1)$

Zadanie 4.1.2 *Rozważmy zmienną $X\sim Pois(\lambda)$. Niech $K=\lfloor\lambda\rfloor$. Pokazać, że $P(X=k)$ jest funkcją rosnącą dla $k\leq K$, oraz malejącą dla $k\geq K$.*

Odp. Popatrzmy na iloraz prawdopodobieństw dla kolejnych wartości: Zatem

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}=\frac{\lambda^{k+1}\cdot e^{-\lambda}\cdot k!}{(k+1)!\cdot\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}=\frac{\lambda}{k+1}$$

Funkcja jest rosnąca kiedy $\frac{\lambda}{k+1}\geq 1$ czyli jeśli $k+1\leq\lambda$ albo inaczej $\lfloor\lambda\rfloor\geq k$.

Zadanie 4.1.3 *Pokazać, że jeśli $n_i\to\infty$ oraz $n_ip_i\to\lambda$ (a zatem $p_i\to 0$) to rozkład $Binom(n_i,p_i)$ zbiegają do rozkładu $Pois(\lambda)$.* ***Uwaga:*** *Chodzi tu o zbieżność punktową, tzn. zbieżność prawdopodobieństw przyjęcia każdej konkretnej wartości.*

Odp.

Niech $X_i\sim\text{Binom}(n_i,p_i)$. Wtedy dla $n_i\to\infty$, $p_i\to 0$, $n_i\cdot p_i=\lambda$ mamy

Rozważamy lekko uproszczone zadanie, gdzie iloczyn n_ip_i jest trzymany zawsze stały, dla każdego i. Nie zmienia to wyniku zadania, a ułatwia obliczenia.

$$P(X_i=k)=\binom{n_i}{k}p_i^k(1-p_i)^{n_i-k}=\frac{n_i^{\underline{k}}}{k!}\cdot p_i^k\cdot(1-p_i)^{n_i-k}=\frac{n_i^{\underline{k}}}{n_i^k}\cdot\frac{(n_ip_i)^k}{k!}\cdot(1-p_i)^{n_i-k}=$$
$$\frac{n_i^{\underline{k}}}{n_i^k}\cdot\frac{(n_ip_i)^k}{k!}\cdot(1-p_i)^{n_i}\cdot(1-p_i)^{-k}$$

Pierwszą granicę liczymy następująco (dla ustalonego k):

$$\frac{n_i^{\underline{k}}}{n_i^k}=\frac{n_i}{n_i}\cdot\frac{n_i-1}{n_i}\cdots\frac{n_i-k+1}{n_i}\to 1.$$

Podobnie granica $(1-p_i)^{-k} \xrightarrow{p_i \to 0} 0$, dla ustalonego k. Koeljną granice liczymy następująco:

$$(1-p_i)^{n_i} = \left(1 - \frac{\lambda}{n_i}\right)^{n_i} \xrightarrow{n_i \to \infty} e^{-\lambda}$$

Ostatecznie w granicy otrzymujemy $\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. Wyrażenie po prawej stronie jest dokładnie prawdopodobieństwem w rozkładzie Poissona.

Zadanie 4.1.4 *Idziemy na przyjęcie, na którym jest 500 osób. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dokładnie dwie osoby będą miały tę samą datę urodzin (tj. miesiąc i dzień) co my? Rozwiązać na dwa sposoby:*

- *użyć rozkładu dwumianowego,*
- *przybliżyć rozkładem Poissona.*

Odp.

- z rozkładu dwumianowego: $\binom{500}{2}\left(\frac{1}{365}\right)^2\left(\frac{364}{365}\right)^{498} = 0.2388346769768765$
- z rozkładu Poissona dla $\lambda = \frac{500}{365}$ mamy $\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} = 0.2384516523828490$

λ znajdujemy korzystając z poprzedniego zadania gdzie $\lambda \approx n \cdot p$

Zadanie 4.1.5 *Gramy serię gier (mecz) z przeciwnikiem od którego jesteśmy słabsi, tzn. nasze prawdopodobieństwo wygrania pojedynczej gry jest równe $p < \frac{1}{2}$. Mecz składa się z parzystej liczby gier, wygrywamy jeśli wygramy więcej niż połowę gier. Możemy wybrać liczbę gier w meczu: 0, 2, 4, 6, itd. Jaką liczbę powinniśmy wybrać, aby zmaksymalizować prawdopodobieństwo zwycięstwa.*

Odp. Niech $q = 1 - p$. Niech p^+ oznacza prawd., że po $2n$ turach remisujemy, a po $2n+2$ turach wygrywamy. Mamy

$$p^+ = \binom{2n}{n} p^n q^n p^2.$$

Natomiast niech p^- oznacza prawd., że po $2n$ turach wygrywamy, a po $2n+2$ turach remisujemy. Mamy

$$p^- = \binom{2n}{n+1} p^{n+1} q^{n-1} q^2.$$

Niech $\Delta = \frac{p^+}{p^-}$. Zauważmy, że $\Delta > 1$ oznacza, że $p^+ > p^-$ (czyli bardziej opłaca się grać $2n+2$ rund), a $\Delta < 1$ wręcz przeciwnie. Większość czynników w Δ się skraca i wychodzi:

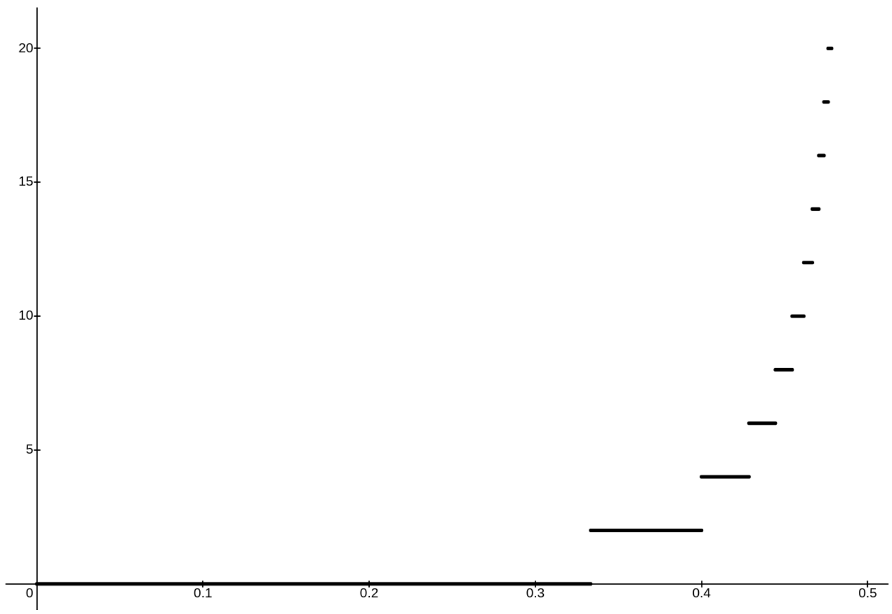
$$\Delta = \frac{p}{n} \Big/ \frac{q}{n+1} > 1$$

$$\frac{p}{n} > \frac{q}{n+1} \implies p(n+1) > (1-p)n \implies p(2n+1) > n \implies p > \frac{n}{2n+1} \implies$$

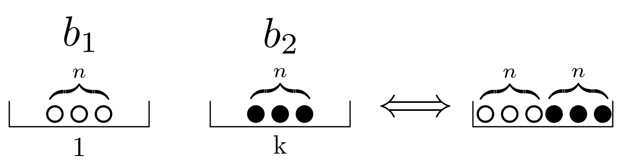
$$p > \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2} \implies \frac{1}{4n+2} > \frac{1}{2} - p \implies 4n+2 < \frac{1}{\frac{1}{2} - p} \implies n < \left(\frac{1}{\frac{1}{2}-p} - 2\right) \Big/ 4$$

Zatem optymalne n jest mniej więcej tej postaci.

Zadanie 4.1.6 (zapałki Banacha) *Palący matematyk nosi po jednym pudełku zapałek w lewej i prawej kieszeni. Za każdym razem, gdy chce zapalić, wyciąga pudełko z losowej kieszeni. Jakie jest prawd. tego, że gdy wyciągnie w końcu puste pudełko, w drugim jest dokładnie k zapałek? Zakładamy, że zabawa zaczyna się z dwoma pudełkami po n zapałek każde.* ***Uwaga:*** *Uzyskany rozkład prawd. nazywa się ujemnym rozkładem dwumianowym. Czy widzisz dlaczego?*



Rysunek 4: Zależność $2n$ od p dla zadania 4.1.5



Odp. Chcemy mieć $n-1$ sukcesów (zapałki z jednej kieszeni) oraz $n-k$ porażek (zapałki z drugiej kieszeni). Prawdopodobieństwo dotarcia do takiego stanu rzeczy to

$$p_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \cdot \binom{n-1+n-k}{n-1} \cdot \underbrace{2}_{\substack{\text{Pudełka}\\ \text{rozróżn.}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\text{Ost. zap. z}\\ \text{pudełka 1}}}$$

$$p_k = \binom{2n-k-1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k-1}$$

Ujemny rozkład dwumianowy opisuje prawdopodobieństwo wystąpienia jakiejś liczby sukcesów w ciągu prób Bernouliego przed wystąpieniem ustalonej liczby porażek.

Rozkład geometryczny

Definicja (Rozkład geometryczny) Zmienna X ma rozkład geometryczny z parametrem p, ozn. $X \sim Geo(p)$, jeśli $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ dla $k \in \mathbb{N}$ i $P(X=k)=0$ dla pozostałych k. Zmienna o rozkładzie geometrycznym opisuje numer pierwszej próby zakończonej sukcesem w ciągu prób Bernoulliego.

Zadanie 4.2.1 *Pokazać, że zmienna o rozkładzie geometrycznym "nie ma pamięci", tzn. dla dowolnych $0 \le m < n$ zachodzi $P(X=n|X>m) = P(X=n-m)$. Nieco mniej formalnie: jeśli czekamy na orła i wypadło już m kolejnych reszek, to prawdopodobieństwo tego, że pierwszy orzeł wypadnie za $n-m$ rzutów jest takie samo jak gdyby całej przeszłości (tj. m reszek) nie było. Wiele osób sądzi, że $P(X=n|X>m) > P(X=n-m)$ - orzeł niejako "należy się".*

Odp. Rozkład geometryczny ma następującą postać

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

Możemy zapisać (z definicji)

$$P(X = n | X > m) = \frac{P(X = n \wedge X > m)}{P(X > m)}.$$

Mianownik

$$P(X > m) = \sum_{i=m+1}^{\infty} p(1-p)^{i-1} = p \sum_{i=m}^{\infty} (1-p)^i = p \cdot \frac{(1-p)^m}{1-(1-p)} = (1-p)^m.$$

Licznik

$$P(X = n \wedge X > m) = p(1-p)^{n-1} \quad \& \quad n > m.$$

Wynik

$$P(X = n | X > m) = \frac{p(1-p)^{n-1}}{(1-p)^m} = p \cdot (1-p)^{n-m-1} = P(X = n - m).$$

Zadanie 4.2.2 *Pokaż, że każda zmienna losowa przyjmująca wartości 1,2,... i nie mająca pamięci (zobacz poprzednie zadanie) ma rozkład geometryczny. Jest to więc własność definiująca rozkład geometryczny.*

Odp. Rozważmy funkcję $f_n = P(X > n)$. Możemy też zapisać, $P(X = n) = f_{n-1} - f_n$.

$$P(X = n+1 | X > n) = \frac{P(X = n+1 \wedge X > n)}{P(X > n)} = \frac{P(X = n+1)}{f_n} = \frac{f_n - f_{n+1}}{f_n} = 1 - \frac{f_{n+1}}{f_n}.$$

Warunek na brak pamięci możemy zapisać jako (warunek z poprzedniego zadania)

$$P(X = n+1 | X > n) = P(X = 1) = 1 - f_1.$$

Porównując dwa wyrażenia ze sobą

$$1 - \frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 - f_1 \implies \frac{f_{n+1}}{f_n} = f_1 = \text{const.}$$

Zatem dostaliśmy ciąg geometryczny, a zatem $f_n = f_1^n$. Co więcej

$$P(X = n) = f_{n-1} - f_n = f_1^{n-1}(1 - f_1)$$

ale wiemy też, że $f_1 = 1 - p$, ponieważ $P(X = 1) = p$. Zatem

$$P(X = n) = p \cdot (1-p)^{n-1}$$

Ostatecznie otrzymaliśmy rozkład geometryczny.

Zadanie 4.2.3 *Rzucamy monetą do momentu, kiedy wypadnie drugi orzeł. Pokazać, że jeśli ten drugi orzeł wypada w n-tym rzucie, prawd. wypadnięcia pierwszego orła w i-tym rzucie ($i = 1, \ldots, n-1$) jest takie samo dla każdego i.*

Odp. Niech

- p – prawdopodobieństwo wypadnięcia orła,
- A – pierwszy orzeł w i-tym rzucie
- B – drugi orzeł w n-tym rzucie

Wtedy możemy zapisać

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{p \cdot (1-p)^{i-1} \cdot p \cdot (1-p)^{n-i-1}}{\sum_{i=1}^{n} p \cdot (1-p)^{i-1} \cdot p \cdot (1-p)^{n-i-1}} = \frac{p^2 \cdot (1-p)^{n-2}}{(n-1) \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2}} = \frac{1}{n-1}$$

Niezależność zmiennych losowych

Definicja (Niezależność zmiennych losowych) Zmienne losowe X, Y są niezależne jeśli dla każdych zbiorów borelowskich $A, B \subseteq \mathbb{R}$ zachodzi $P(X \in A \wedge Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$.

Zadanie 4.3.1 *Jaki rozkład ma suma dwóch niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie dwumianowym z tym samym p? Jaki rozkład ma suma dwóch niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Poissona?*

Odp.
a) Mamy dwie niezależne zmienne losowe: $X \sim \text{Binom}(n, p)$ oraz $Y \sim \text{Binom}(m, p)$. Pytamy się o $P(X + Y)$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$P(Y = k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}.$$

$$P(X+Y=k) =$$
$$\sum_{l=0}^{k} P(X=l) \cdot P(Y=k-l) = \sum_{l=0}^{k} \binom{n}{l}\binom{m}{k-l} p^l \cdot p^{k-l} \cdot (1-p)^{n-l+m-k+l} =$$
$$p^k (1-p)^{n+m-k} \underbrace{\sum_{l=0}^{k} \binom{n}{l}\binom{m}{k-l}}_{\text{Vandermonde's identity}} = \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k} = P\left(\text{Binom}(n+m, p)\right)$$

$\sum_{l=0}^{k} \binom{n}{l}\binom{m}{k-l} = \binom{n+m}{k}$

b)

$$P(X = k) = \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1}$$
$$P(Y = k) = \frac{\lambda_2^k}{k!} e^{-\lambda_2}.$$

$$P(X+Y=k) =$$
$$\sum_{l=0}^{k} P(X=l) \cdot P(Y=k-l) = \sum_{l=0}^{k} \frac{\lambda_1^l}{l!} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^{k-l}}{(k-l)!} \cdot e^{-\lambda_2} =$$
$$e^{-\lambda_1-\lambda_2} \sum_{l=0}^{k} \frac{\lambda_1^l}{l!} \cdot \frac{\lambda_2^{k-l}}{(k-l)!} \cdot \frac{k!}{k!} = e^{-\lambda_1-\lambda_2} \sum_{l=0}^{k} \underbrace{\frac{k!}{l!(k-l)!}}_{\binom{k}{l}} \cdot \lambda_1^l \cdot \lambda_2^{k-l} \cdot \frac{1}{k!} =$$
$$\frac{1}{k!} e^{-\lambda_1-\lambda_2} \cdot (\lambda_1+\lambda_2)^k = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} = P\left(\text{Poiss}(\lambda_1+\lambda_2)\right)$$

Zadanie 4.3.2 *Pokazać, że jeśli X i Y to niezależne i dyskretne zmienne losowe i $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ to $f(X)$ oraz $g(Y)$ są także niezależne.*

Odp.

$$P(f(X)=a \ \wedge \ g(Y)=b) = P(X \in f^{-1}(a) \ \wedge \ Y \in g^{-1}(b)) = P(X \in A \ \wedge \ Y \in B) = \sum_{x\in A \wedge y \in B} P(x,y) = \sum_{x\in A \wedge y \in B} P(x)\cdot P(y) = \sum_{x\in A} P(x) \cdot \sum_{y \in B} P(y) = P(X\in f^{-1}(a)) \cdot P(Y \in g^{-1}(b)) = P(f(X)=a)\cdot P(g(Y)=b)$$

Zadanie 4.3.3 *Jaki jest rozkład liczności potomstwa owada, u którego liczba złożonych jaj ma rozkład Poissona, i z każdego jaj niezależnie wykluwa się młode z prawdopodobieństwem p?*

Odp. Wiemy, że liczba złożonych jaj: $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, oraz szansa wyklucia: p.

$$P(Y=l) = \sum_{i=0}^{\infty} P_j(X=l+i)\cdot p^l \cdot (1-p)^i \cdot \binom{l+i}{i} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{l+i}{i} p^l (1-p)^{l+i-l} \frac{\lambda^{l+i}}{(l+i)!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(l+i)!}{l!i!}p^l(1-p)^{l+i-l}\frac{\lambda^{l+i}}{(l+i)!} = e^{-\lambda}\left(\frac{p}{1-p}\right)^l \frac{1}{l!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(\lambda(1-p)\right)^{l+i} = e^{-\lambda}\left(\frac{p}{1-p}\right)^l \frac{1}{l!}\left(\lambda(1-p)\right)^l \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^i}{i!} = e^{-\lambda}\left(\frac{p}{1-p}\right)^l \frac{1}{l!}\left(\lambda(1-p)\right)^l e^{\lambda(1-p)} = \frac{(p\lambda)^l}{l!}e^{-\lambda p} \sim \mathrm{Poiss}(\lambda p)$$

Zadanie 4.3.5 *Niech X, Y będą niezależne o rozkładzie Poissona. Pokazać, że rozkład $X|X+Y=n$ jest dwumianowy, t.j. $P(X=k|X+Y=n) = P(Z=k)$ dla pewnej zmiennej Z o rozkładzie dwumianowym.*

Odp. X, Y - niezależne zmienne losowe z rozkładem $\mathrm{Poiss}(\lambda_{1,(2)})$, takie, że $P(X=k|X+Y=n) = P(Z=k) \sim$ Binomial

$$P(X=k|X+Y=n) = \frac{P(X=k \cap X+Y=n)}{P(X+Y=n)} = \frac{P(X=k)\cdot P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)} = \frac{\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-\lambda_1-\lambda_2}} = \frac{\binom{n}{k}\cdot\lambda_1^k\cdot\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n} = \binom{n}{k}\frac{\lambda_1^k}{(\lambda_1+\lambda_2)^k}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^{n-k}} = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k} \sim \mathrm{Binomial}\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$$

Zadanie 4.3.6 *Pokazać, że jeśli X, Y są niezależnymi zmiennymi o rozkładzie geometrycznym, to* $\min(X,Y)$ *też ma rozkład geometryczny.*

Odp. X, Y rozkład geometryczny z parametrami p_1, p_2. Policzmy

$$P(X\leq k) = \sum_{i=1}^{k} p_1(1-p_1)^i = p_1\cdot\frac{1-(1-p_1)^k}{1-1+p_1} = 1-(1-p_1)^k$$

Zatem $P(X > k) = (1-p_1)^k$ oraz $P(Y > k) = (1-p_2)^k$. Zatem prawdopodobieństwo, że obie zmienne losowe będą większe od k wynosi $P(X > k \wedge Y > k) = [(1-p_1)(1-p_2)]^k$. Ale możemy zauważyć, że (praktycznie z defninicji)

$$P(X > k \wedge Y > k) = P(\min(X, Y) > k)$$

Zatem dystrybuanta $P(\min(X, Y) \leq k) = 1 - [(1-p_1)(1-p_2)]^k$, a zatem zmienna losowa $\min(X, Y)$ ma rozkład geometryczny z parametrem $1 - (1-p_1)(1-p_2)$.

---

5 Wartość oczekiwana i wariancja

Wartość oczekiwana i wariancja

Definicja (Wartość oczekiwana) Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie dyskretnym. Wartością oczekiwaną (ew. średnią) X nazywamy wartość sumy

$$\mathbb{E}X = \sum_{x\in\mathbb{R}} x \cdot P(X = x),$$

o ile jest ona absolutnie zbieżna.

Definicja (Wariancja) Wariancją dyskretnej zmiennej losowej X nazywamy wartość

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2,$$

o ile ona istnieje. Odchyleniem standardowym X nazywamy

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}X}.$$

Zadanie 5.1.1 *Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu geometrycznego.*

Odp. $P(G = k) = p(1-p)^{k-1}$ - rozkład geometryczny. Niech $q = 1 - p$. Wtedy

$$\mathbb{E}(G) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-q)q^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}(kq^{k-1} - kq^k) = \sum_{k=0}^{\infty}((k+1)q^k - kq^k) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p},$$

$$\mathbb{E}(G^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1}p = \sum_{k=1}^{\infty} k^2pq^{k-1} = \sum_{k\geq1} k(k+1)pq^{k-1} - \sum_{k\geq1} kpq^{k-1} = \sum_{k\geq1} k(k+1)pq^{k-1} - \frac{1}{p} =$$
$$p\frac{2}{(1-p)^3} - \frac{1}{p} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p},$$

gdzie użyliśmy

Kolejne linijki są pochodną linijki wcześniejszej

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$
$$\frac{\partial}{\partial q}\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial q}\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

$$\mathrm{Var}(G) = \mathbb{E}(G^2) - (\mathbb{E}(G))^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

Zadanie 5.1.2 *Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu Poissona.*

Odp.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\geq 1} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k\geq 1} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda,$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\left((k-1)\frac{\lambda^k}{(k-1)!} + \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\right) =$$

$$e^{-\lambda}\left(\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right) = e^{-\lambda}\left(\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}\right) = \lambda(\lambda+1)$$

$$\mathrm{Var}(X) = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda$$

Zadanie 5.1.3 *Jan ma przyjaciela, który jest nałogowym hazardzistą i uwielbia grać w ruletkę. Za każdym razem stawia wtedy 10zł na liczbę 13, i jeśli ta liczba wypada (a jest ona jedną z 38 liczb na kole ruletki), wygrywa z powrotem swoje 10zł oraz dodatkowe 350zł, w przeciwnym przypadku traci postawione 10zł. Jan postanawia wyleczyć go z nałogu. Przed każdą wizytą w kasynie zakłada się z przyjacielem o to, że po 36 obstawieniach będzie na minusie. Stawka zakładu wynosi 200zł. Jak dobrze działa takie lekarstwo?*

Odp. Niech X to zmienna losowa opisująca zysk po 36 grach. Korzystamy z liniowości wartości oczekiwanej:

$$\mathbb{E}(X) = 36\cdot\left(\frac{1}{38}\cdot 350 - \frac{37}{38}\cdot 10\right) \approx -18.947,$$

zatem bez dodatkowego zakładu jesteśmy na minusie. Po dodatkowym zakładzie (zmienna losowa Y):

$$\mathbb{E}(Y) = -18.94 + P_M\cdot(-200) + (1-P_M)\cdot 200,$$

gdzie P_M jest prawdopodobieństwem, że po 36 grach będzie na minusie czyli $P_M = \left(\frac{37}{38}\right)^{36} = 0.382$. Zatem $\mathbb{E}(Y) = 27.9$, czyli po dodatkowym zakładzie jesteśmy na plusie.

Można to przybliżyć ze wzoru na e bo $\frac{1}{e} = 0.367$

Zadanie 5.1.4 *Gramy w następującą grę: Ktoś rzuca monetą, aż do wypadnięcia pierwszego orła. Powiedzmy, że orzeł wypadł w i-tym rzucie. Następnie do dwóch kopert wkłada odpowiednio 2^i i 2^{i+1} zł. Dostajemy losowo wybraną kopertę i mamy zdecydować, czy chcemy wziąć tę drugą czy nie. Powiedzmy, że otrzymaliśmy kopertę z kwotą 2^i zł. Obliczyć wartość oczekiwaną kwoty w drugiej kopercie i porównać z 2^i . Dlaczego wynik z poprzedniego punktu wydaje się nie mieć sensu?*

Odp. Dostaliśmy kopertę z 2^i monet tzn. że albo w drugiej kopercie jest 2^{i-1} monet albo 2^{i+1}. Ten pierwszy przypadek występuje 2 razy częściej (rozkład geometryzny z $p = \frac{1}{2}$). Przy strategi zmień kopertę wartość oczekiwana wynosi $\frac{2}{3}\cdot 2^{i-1} + \frac{1}{3}\cdot 2^{i+1} = 2^i$, czyli bez zmian.

Bardziej formalnie: niech X - $\log_2$ ile zł jest w wylosowanej kopercie; $X \in \{0,1,2,3,4,\ldots\}$ oraz Y - $\log_2$ ile zł jest w drugiej kopercie którą dostajemy. Wtedy chcemy policzyć $P(X = i+1|Y = i)$ oraz $P(X = i-1|Y = i)$:

$$P(X = i+1|Y = i) = \frac{P(X = i+1 \cap Y = i)}{P(Y = i)} = \frac{\frac{1}{2^i}}{\frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i-1}}} = \frac{1}{3}$$

$$P(X = i-1|Y = i) = \frac{P(X = i-1 \cap Y = i)}{P(Y = i)} = \frac{\frac{1}{2^{i-1}}}{\frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^i}} = \frac{2}{3}$$

Korzystamy także z faktu, że

$$P(Y = i) = P\left(Y = i \cap (X = i + 1 \cup X = i - 1)\right) = \\ P(Y = i \cap X = i + 1) + P(Y = i \cap X = i - 1) = \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{3}{2^i}$$

Jeśli zmienimy kopertę to dostaniemy 2^{i+1} z prawdopodobieństem $\frac{1}{3}$ lub 2^{i-1} z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$. Wartość oczekiwana to 2^i.

Gdybyśmy zamiast 2^i dostawali 3^i to zmiana zawsze miałaby sens bo $\frac{2}{3} \cdot 3^{i-1} + \frac{1}{3} \cdot 3^{i+1} = 3^i(\frac{2}{9} + 1) > 3^i$, czyli zawsze opłaca się zmienić.

Zadanie 5.1.5 *Kasyno oferuje następującą grę: Krupier rzuca monetą do momentu wypadnięcia pierwszego orła. Jeśli pierwszy orzeł wypada w i-tym rzucie, wygrywamy 2^i zł. Ile warto zapłacić za granie w tę grę? Zastanów się nad praktycznym sensem tego wyniku*

Odp. $P(X = k) = p(1-p)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$$\mathbb{E}(\text{wygrania}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k} = \infty,$$

czyli wartość oczekiwana nie istnieje. Niestety nie istnieje też nieskończona ilość pieniędzy, którą możemy wydać na grę. Dwa komentarze:

- Załóżmy, że mamy 1000000 zł, i w pewnej grze możemy albo stracić 999000 zł, albo wygrać 2000000 zł. Czy taka gra się opłaca? Zgodnie z wartością oczekiwaną, zdecydowanie tak, ale rozsądny milioner by raczej tego nie zrobił: praktyczna różnica między posiadaniem 1000000 a 3000000 zł jest dużo mniejsza niż między posiadaniem 1000000 a 1000 zł. Sensowna jest reguła, że użyteczność posiadania k złotych jest wprost proporcjonalna do $\log(k)$ (zasada psychologiczna sprawdzająca się w wielu sytuacjach). Przy takim założeniu wychodzi, że wysokość kwoty, którą się opłaca obstawić, jest proporcjonalna do logarytmu z posiadanego kapitału (choć to chyba trudno policzyć).
- W praktyce kasyno ma również ograniczony kapitał, i możemy przyjąć, że istnieje takie M, że jak gracz wygra 2^N gdzie $N > M$, to kasyno i tak płaci 2^M. Wówczas łatwo policzyć, że kwota, którą warto obstawić, jest proporcjonalna do M.

Liniowość wartości oczekiwanej

Zadanie 5.2.1 *Na kinowy seans "dla singli"spóźniło się 15 singli: 8 mężczyzn i 7 kobiet. Ponieważ jest już ciemno, a spóźnialscy nie chcą przeszkadzać innym, siadają wszyscy losowo w pierwszym rzędzie, który ma 16 miejsc (czyli o jedno za dużo). Ile będzie średnio par mężczyzna-kobieta siedzących obok siebie?*

Odp. Dla każdego z 15 „oparć” (podłokietników) liczymy jaka jest szansa, że będą przy nim siedzieć osoby różnej płci. Na jednym miejscu może usiąść 15 osób lub może zostać puste, czyli 16 możliwości, na drugim mamy tylko 15 możliwości). Możliwych uporządkowanych par jest $16 \cdot 15$. Tych które nas interesują jest $2 \cdot 8 \cdot 7$ (na pierwszym mężczyzna na drugim kobieta oraz na odwrót) czyli $P = \frac{2 \cdot 8 \cdot 7}{16 \cdot 15} = \frac{7}{15}$ i jest to prawdopodobieństwo, że przy jednym oparciu siedzi para kobieta-mężczyzna. Ponieważ mamy 15 takich podłokietników to średnio będziemy mieli $\frac{7}{15} \cdot 15 = 7$ par.

Zadanie 5.2.2 *Kupujemy gumy do żucia, w każdej znajduje się jedna z n historyjek. Ile gum trzeba średnio kupić, żeby zebrać wszystkie historyjki? Jaka jest wariancja tej wielkości? Zakładamy, że historyjki znajdujące się w kolejno kupowanych gumach są losowe (każda równie prawdopodobna) i niezależne od siebie.*

Odp. Niech X_n – liczba kupionych gum od zebrania historii $n-1$ do historii n z N wszystkich. Zatem $X_n \sim \mathrm{Geom}(p = \frac{N-n}{N})$. Wiemy, że $\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{p}$ oraz $\mathrm{Var}(X_n) = \frac{1-p}{p^2}$. W zadaniu musimy policzyć, średnią ilość gum, którą trzeba kupić, żeby zebrać wszystkie historię czyli

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{N-1} X_n\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E}(X_n) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{N}{N-n} = N\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N-n} = N\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = N \cdot H_n \sim N \cdot \int_1^N \frac{\mathrm{d}x}{x} = N \cdot \ln N.$$

Podobnie jest z wariancją

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{n=0}^{N-1} X_n\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{Var}\,(X_n) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1-\frac{N-n}{N}}{(\frac{N-n}{N})^2} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{Nn}{(N-n)^2} = N \cdot \sum_{k=1}^{N} \frac{N-k}{k^2} =$$
$$N \cdot \left(N\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\right) = N^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - N^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k} - N\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \leq N^2\zeta(2) = N^2 \cdot \frac{\pi^2}{6}$$

Zadanie 5.2.3 *Wrzucamy losowo n kul do n urn. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję liczby niepustych urn.*

Zadanie robione na wykładzie

Odp. Niech X_i - i-ta urna niepusta ($X_i = 0$ oznacza urnę pustą, a $X_i = 1$ oznacza urnę niepustą). Niech $X = \sum_i X_i$. Wtedy

$$\mathbb{E}(X_i) = 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^N$$

Jeden minus prawdopodobieństwo, że urna zostanie pusta

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i \mathbb{E}(X_i) = N\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^N\right),$$

Tutaj po cichu zakładamy, że kule są rozróżnialne, co nie jest do końca sprecyzowane w zadaniu

a jeśli N jest odpowiednio duże to możemy użyć przybliżenia $\mathbb{E}(X) = N(1-\frac{1}{e}) \approx 0.63N$. Teraz wariancja. Dla zmiennych losowych, które mają tylko dwie wartości, można zobaczyć, że:

$$\mathbb{E}(X_i^2) = (X_i = 0)^2 \cdot P(X_i = 0) + (X_i = 1)^2 \cdot P(X_i = 1) = \mathbb{E}(X_i),$$

oraz

$$\mathbb{E}(X_iX_{j\neq i}) = 1 \cdot P(X_i = 1 \wedge X_j = 1) + 0 \cdot \ldots = P(X_i = 1 \wedge X_j = 1) = P(X_i = 1 | X_j = 1) \cdot P(X_j = 1).$$

Teraz licząc wariancję spotkamy taki wyraz

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}\left(\sum_{ij} X_iX_j\right) = \sum_{i=j} \mathbb{E}\, X_iX_i + \sum_{i\neq j} \mathbb{E}\, X_iX_j = \sum_i P(X_i = 1) + \sum_{i\neq j} P(X_i = 1 \wedge X_j = 1).$$

Widać, że najtrudniejsze do policzenia to drugi człon.

Nie chce mi się tego liczyć tutaj.

Zadanie 5.2.4 *W n-wierzchołkowym grafie losowym G każda krawędź istnieje z prawdopodobieństwem p niezależnie od pozostałych krawędzi. Oblicz wartość oczekiwaną liczby wierzchołków izolowanych i wariancję tej wielkości.*

Odp. X_i – i-ty wierzchołek jest izolowany ($X_i = 0$ – oznacza wierzchołek nieizolowany, $X_i = 1$ – oznacza wierzchołek izolowany. $X = \sum_i X_i$.

$$\mathbb{E}(X_i) = (1-p)^{n-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbb{E}(X) = n \cdot (1-p)^{n-1}$$

z żadnego innego wierzchołka nie może być krawędzi do i-tego.

Z poprzedniego zadania widać, że najtrudniejsze jest policzenie $P(X_i = 1 \wedge X_j = 1)$:

$$P(X_i = 1 \wedge X_j = 1) = P(X_i = 1 | X_j = 1) \cdot P(X_j = 1) = (1-p)^{n-2} \cdot (1-p)^{n-1} = (1-p)^{2n-3}$$

Zatem:

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}\left(\sum_i X_i\right)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_i (X_i)^2\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{i \neq j} X_i X_j\right) = \sum_i \mathbb{E}(X_i) + \mathbb{E}\left(\sum_{i \neq j} X_i X_j\right) =$$
$$\mathbb{E}(X) + n \cdot (1-p)^{n-1} \cdot (n-1) \cdot (1-p)^{n-2} = \mathbb{E}(X) + n \cdot (n-1) \cdot (1-p)^{2n-3}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) = n \cdot (1-p)^{n-1} + n \cdot (n-1) \cdot (1-p)^{2n-3} - n^2 \cdot (1-p)^{2n-2} = \\ n \cdot (1-p)^{n-1} \left\{1 + (n-1) \cdot (1-p)^{n-2} - n \cdot (1-p)^{n-1}\right\} = \\ n \cdot (1-p)^{n-1} \left\{1 - (1-p)^{n-2} + n \cdot (1-p)^{n-2} [-1 + 1 - p]\right\} = \\ n \cdot (1-p)^{n-1} \left\{1 - (1-p)^{n-2} [1 - np]\right\} \end{aligned}$$

Funkcje tworzące prawdopodobieństwa

Definicja (Funcja tworząca prawdopodoieństwa) Niech X będzie zmienną losową o wartościach naturalnych. Funkcją tworzącą prawdopodobieństwa zmiennej X zmiennej nazywamy

$$g_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) t^k.$$

Zadanie 5.3.1 *Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu Poissona korzystając z funkcji tworzących prawdopodobieństwa.*

Odp.

$$G_X(s) = \sum_x p_X(x) s^x$$
$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$
$$G_X(s) = \sum_{k \geq 0} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} s^k = e^{-\lambda} \sum_{k \geq 0} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{-\lambda + \lambda s}$$

W tym obliczeniu korzystamy z rozwinięcia e^x w szereg Taylora. Wartość oczekiwaną liczymy różniczkując i podstawiając do jedynki:

$$G'(s) = \frac{d}{ds} e^{\lambda(s-1)} = \lambda e^{\lambda(s-1)},$$

i wychodzi

$$\mathbb{E} = G'(1) = \lambda.$$

Dla wariancji liczymy drugą pochodną:

$$G''(s) = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)}.$$

I teraz:

$$\mathrm{Var} = G''(1) + \mu - \mu^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Zadanie 5.3.2 *Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu geometrycznego korzystając z funkcji tworzących prawdopodobieństwa.*

Odp.

$$P(X = k) = pq^{k-1}$$

$$G(s) = \sum_{k\geq 1} pq^{k-1}s^k = ps\sum_{k\geq 1}(qs)^{k-1} = ps\sum_{k\geq 0}(qs)^k = ps \cdot \frac{1}{1-qs}$$

$$G(s) = \frac{ps}{1-(1-p)s}.$$

Różniczkujemy po s i wychodzi:

$$G'(s) = \frac{p}{(1-qs)^2}$$

$$\mathbb{E} = G'(1) = \frac{1}{p}.$$

Różniczkujemy jeszcze raz:

$$G''(s) = \frac{2pq^2}{(1-ps)^3}$$

$$\mathrm{Var} = G''(1) + \mu - \mu^2 = \ldots = \frac{p}{(1-p)^2}.$$

6 Nierówności

Twierdzenie (Nierówność Markowa) Niech X będzie dyskretną zmienną losową o wartościach nieujemnych i niech $\mathbb{E}X < +\infty$. Wtedy dla dowolnego $c > 0$ zachodzi

$$P(X \geq c\,\mathbb{E}X) \leq \frac{1}{c}$$

Twierdzenie (Nierówność Czebyszewa) Niech X będzie dyskretną zmienną losową taką, że $\mathbb{E}X < +\infty$ oraz $\mathrm{Var}X < +\infty$ i niech $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}X}$ będzie odchyleniem standardowym X. Wtedy dla dowolnego $c > 0$ zachodzi

$$P(|X - \mathbb{E}X| \geq c\sigma) \leq \frac{1}{c^2}$$

Twierdzenie (Nierówność Chernoffa dla prób Poissona) Niech $X_1, \ldots, X_n$ niezależne zmienne o rozkładzie 0/1-kowym, przy czym $P(X_i = 1) = p_i = 1 - q_i$. Niech ponadto $X = \sum_{i=1}^n X_i$ i niech $\mu = EX = \sum_{i=1}^n p_i$. Wtedy:

- dla dowolnego $\delta > 0$ zachodzi $P(X \geq (1+\delta)\mu) \leq \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^\mu$
- dla dowolnego $0 < \delta \leq 1$ zachodzi $P(X \geq (1+\delta)\mu) \leq e^{-\mu\delta^2/3}$
- dla $\delta \geq 2e - 1$ zachodzi $P(X \geq (1+\delta)\mu) \leq 2^{-(1+\delta)\mu}$,

lub prościej: dla $c \geq 2e\mu$ zachodzi $P(X \geq c) \leq 2^{-c}$.

Zadanie 6.1 *W zadaniu dotyczącym problemu kolekcjonera kuponów (zadanie 2 z ćwiczeń 5, część "Liniowość wartości oczekiwanej") oszacuj prawdopodobieństwo tego, że liczba gum, które trzeba kupić aby zdobyć wszystkie historyjki przekroczy swoją wartość oczekiwaną c-krotnie:*

- *z nierówności Markowa,*
- *z nierówności Czebyszewa,*
- *obliczając dla pojedynczej historyjki prawdopodobieństwo tego, że ciągle jej nie mamy po kupieniu $c\,\mathbb{E}(X)$ gum.*

Porównaj uzyskane oszacowania.

Odp.

$$\mathbb{E}(X) = n \cdot H_n \approx n \cdot \log n \qquad \mathrm{Var}(X) \le n^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} < 2n^2 \qquad X \sim \mathrm{Geom}\left(\frac{1}{n \cdot H_n}\right)$$

a) Nierówność Markova
X - dyskretna zmienna losowa, o wartościach nieujemnych, $\mathbb{E}(X) < \infty$

$$P(X \ge c \cdot \mathbb{E}(X)) \le \frac{1}{c} \qquad \left[\text{lub} \quad P(X \ge c) \le \frac{\mathbb{E}(X)}{c}\right]$$

Zatem:

$$P(X \ge c \cdot n \cdot H_n) \le \frac{1}{c}$$

b) Nierówność Czebyszewa
X - dyskretna zmienna losowa, $\mathbb{E}(X) < \infty$ i $\mathrm{Var}(X) < \infty$ i $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var(X)}}$ – odchylenie standardowe

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \ge c\sigma) \le \frac{1}{c^2} \qquad \left[\text{lub} \quad P(|X - \mathbb{E}(X)| \ge c) \le \frac{\mathrm{Var(X)}}{c^2}\right]$$

Wtedy dla $\tilde{c} \equiv (c-1) \cdot \mathbb{E}(X)$:

$$\begin{aligned}
P(|X - \mathbb{E}(X)| \ge \tilde{c}) &= P(X - \mathbb{E}(X) \ge \tilde{c}) + P(X - \mathbb{E}(X) < -\tilde{c}) \\
&= P(X \ge \mathbb{E}(X) + \tilde{c}) + P(X < \mathbb{E}(X) - \tilde{c}) \\
&= P(X \ge c \cdot \mathbb{E}(X)) + P(X < \mathbb{E}(X)(2-c)) \\
&\le \frac{\mathrm{Var(X)}}{\tilde{c}^2} \\
&\le \frac{2n^2}{(c-1)^2 \cdot n^2 \cdot (\log n)^2} \\
&= \frac{2}{(c-1)^2} \cdot \frac{1}{(\log n)^2}
\end{aligned}$$

Człon $P(X < (2-c)\,\mathbb{E}(X)) \to 0$ dla $c \ge 2$, a więc możemy go zaniedbać w naszym szacowaniu (bo $X \ge 0$).

c) N_i^k – i-ty kupon nie jest kupiony po k zakupach

$$P(N_i^k) = \left(1 - \frac{n-i+1}{n}\right)^k = \left(\frac{i-1}{n}\right)^k \le \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \le e^{-\frac{k}{n}}$$

Dla $k = c \cdot n \cdot \ln n$, prawdopodobieństwo niepowodzenia dla pojedynczego kuponu (dużo gumy kupiliśmy i ciągle brakuje nam tej historyjki), wynosi:

$$P(N_i^k) = e^{-\frac{c \cdot n \cdot \ln n}{n}} = n^{-c}.$$

Ostatecznie:

$$P(X \ge c \cdot n \cdot \ln n) \le n \cdot n^{-c} = n^{-c+1}.$$

Zadanie 6.2 *W wyborach bierze udział dwóch kandydatów: A i B. Przeprowadzamy sondaż przedwyborczy. W ramach sondażu pytamy n osób o to na którego kandydata zamierzają głosować. Zakładamy, że każda z pytanych osób została losowo i niezależnie od pozostałych wybrana ze zbioru osób uprawnionych do głosowania (w szczególności nie wykluczamy powtórzeń). Interesuje nas oszacowanie poparcia kandydata A? Oszacuj jak duże powinno być n, żeby prawdopodobieństwo popełnienia błędu względnego większego niż 1% było mniejsze niż 5%:*

- *z nierówności Czebyszewa*
- *z nierówności Chernoffa.*

Odp. Załóżmy, że p jest frakcją głosujących na kandydata B. Wówczas dla jednego respondenta mamy wariancję $p(1-p)$, dla n respondentów mamy wariancję $np(1-p)$ a dla średniej z n kandydatów – $\mathrm{Var}(X) = \frac{p(1-p)}{n}$. Z nierówności Czebyszewa wychodzi

Wariancje dzielimy przez n, ale z wariancji wychodzi z kwadratem.

$$P(|X-p| \geq 0.01p) \leq \frac{p(1-p)}{n \cdot 0.0001p^2} = 10000\frac{1-p}{pn} \leq 0.05.$$

Zatem $n \geq 200000\frac{1-p}{p}$.

Z kolei z nierówności Chernoffa ($\mu = np, \delta = 0.01$):

$$P(|X-\mu| \geq \mu\delta) \leq 2e^{-\mu p\delta^2/3} \leq 0.05.$$

Czyli $np \cdot 0.0001/3 \geq \log(40)$, zatem $n \geq 30000 \cdot \log(40)/p = 110666/p$.

Zadanie 6.3 *Dysponujemy algorytmem, który wypisuje prawidłową odpowiedź z prawdopodobieństwem $p > \frac{1}{2}$. Przyjmijmy dla uproszczenia, że wynik jest liczbą całkowitą. Aby zwiększyć prawdopodobieństwo uzyskania prawidłowej odpowiedzi wykonujemy algorytm n-krotnie i za odpowiedź uznajemy medianę z otrzymanych wyników. Oszacuj prawdopodobieństwo uzyskania prawidłowej odpowiedzi.*

Chyba bardziej logicznie to zadanie sformułować w sposób następujący: Chcemy obliczyć pewną wartość będącą liczbą rzeczywistą, x. Nie potrzebujemy jej obliczyć dokładnie, wystarczy nam, by nasza odpowiedź była wystarczająco dobra, czyli w pewnym przedziale wokół x. Jesteśmy w stanie teoretycznie udowodnić, że $p > 1/2$ wyników naszego algorytmu jest wystarczająco dobra. Co zrobić, by uzyskać wystarczająco dobrą odpowiedź z prawdopodobieństwem co najmniej $1-\varepsilon$?

Odp. Niech X_i - zmienna losowa, taka, że $X_i = 1 - i$-ta odp. jest dobra czyli jest równa medianie oraz $X_i = 0 - i$-ta odp. nie jest dobra czyli jest różna od medniany. $X_i \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$. Niech $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$; oraz $\mathbb{E}\,X = n \cdot p$. Niech A – zdarzenie, że mediana z n odpowiedzi nie jest dostatecznie dobra. A zachodzi na pewno, gdy $X \leq \frac{n}{2}$ (ponieważ, jak mamy więcej niż połowe dobrych odpowiedzi to **na pewno** mediana będzie też dobra; w drugą stronę to nie działa ale się zawiera). Zatem z nierówności Chernoffa:

$$P(A) \leq P\left(X \leq \frac{n}{2}\right) = P\left(X \leq np \cdot \left(1 + \frac{-2p+1}{2p}\right)\right) \leq e^{-np(\frac{2p-1}{2p})^2/2} \leq \varepsilon$$

Zatem $n \geq -2\log\varepsilon \cdot \frac{1}{p(\frac{2p-1}{2p})^2} = \Omega(\log\varepsilon)$

Zadanie 6.4 *W zadaniu dotyczącym wierzchołków izolowanych (zadanie 4 z ćwiczeń 5, część "Liniowość wartości oczekiwanej") oszacuj prawdopodobieństwo tego, że w losowym grafie nie ma wierzchołków izolowanych. Zbadaj zależność otrzymanego wyniku od prawdopodobieństwa p wystąpienia pojedynczej krawędzi.*

Odp. Używamy tej samej notacji co w podanym zadaniu. Prawdopodobieństwo tego, że w grafie nie będzie wierzchołków izolowanych wynosi $P(X = 0) = P(X \leq 0) \leq P(|X - \mathbb{E}X| \geq \mathbb{E}X)$. Spróbujmy oszacować z nierówności Czebyszewa

$$P(|X - \mathbb{E}X| \geq \mathbb{E}X) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{(\mathbb{E}X)^2}.$$

Zatem mamy oszacowanie górne na liczbę wierzchołków izolowanych:

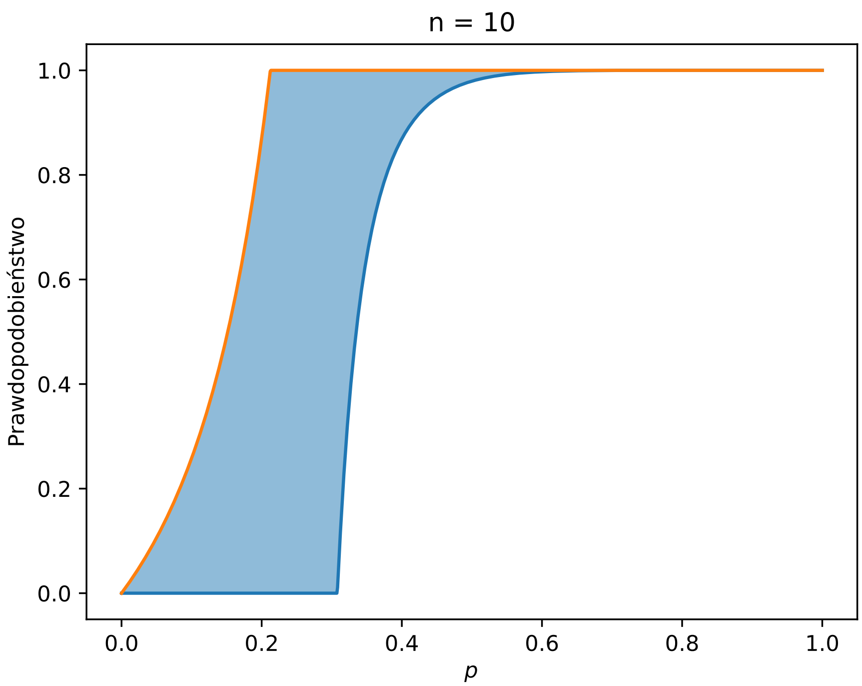
$$P(X = 0) \leq \frac{n(1-p)^{n-1}[1-(1-p)^{n-2}(1-np)]}{(n(1-p)^{n-1})^2} = \frac{1-(1-p)^{n-2}(1-np)}{n(1-p)^{n-1}}.$$

Teraz poszukajmy oszacowania z góry. Prawdopodobieństwo tego, że w grafie nie będzie wierzchołków izolowanych wynosi $P(X = 0) = 1 - P(X \geq 1)$. Spróbujmy oszacować

$$P(X \geq 1) = P(X - \mathbb{E}X \geq 1 - \mathbb{E}X) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{(1-\mathbb{E}X)^2}.$$

W nierówności Chebyszewa mamy moduł w środku prawdopodobieństwa, ale prawdopodobieństwo jest nieujemne, więc tym bardziej ta nierówność zachodzi dla tylko jednej części modułu.
Dodatkowo, to przybliżenie jest dobre tylko wtedy, gdy $\mathbb{E}X < 1$.
Zatem

$$P(X = 0) \geq 1 - \frac{n(1-p)^{n-1}[1-(1-p)^{n-2}(1-np)]}{(1-n(1-p)^{n-1})^2}.$$



Rysunek 5: Graficzne rozwiązanie zadania 4 z wierzchołkami izolowanymi w grafie losowym. Istnieją takie p dla których obie nierówności nic nie mówią, ale widać, że dla rosnącego p rośnie eksponencjalnie prawdopodobieństwo, że nie będzie w takim grafie wierzchołków izolownaych.

7 Łańcuchy Markowa

Definicja (łańcuch Markowa) Łańcuchem Markowa o zbiorze stanów $S \subseteq \mathbb{R}$ nazywamy ciąg zmiennych losowych $X_0, X_1, X_2, \ldots$ taki, że

$$P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1} \wedge X_{n-2} = x_{n-2} \wedge \ldots \wedge X_0 = x_0) = P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) = p_{x_{n-1}, x_n}$$

dla każdego $n > 0$ i ciągu stanów $x_0, x_1, \ldots, x_n \in S$.

Zadanie 7.1 *Oblicz średnie czasy powrotu dla wszystkich stanów łańcucha Markowa o macierzy przejścia* $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ *wprost oraz korzystając z twierdzenia ergodycznego.*

Odp.

a) z tw. ergodycznego

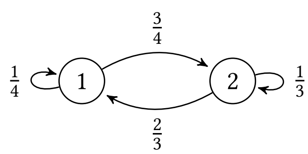
Tw. ergodyczne: $\pi M = \pi$

$$\begin{pmatrix} \pi_a & \pi_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_a & \pi_b \end{pmatrix} \quad \text{gdzie} \quad \pi_a + \pi_b = 1$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\pi_a + \frac{2}{3}\pi_b & = \pi_a \\ \frac{3}{4}\pi_a + \frac{1}{3}\pi_b & = \pi_b \end{cases} \implies \begin{cases} 8\pi_b = 9\pi_a \\ \pi_b = 1 - \pi_a \end{cases} \implies \begin{cases} \pi_a = \frac{8}{17} \\ \pi_b = \frac{9}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi_a} = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8} \\ \frac{1}{\pi_b} = \frac{17}{9} = 1\frac{8}{9} \end{cases}$$

b) wprost



- idziemy do 1:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 1 + \frac{2}{3}t_1 + \frac{1}{3}t_2 \end{cases}$$

  zatem $t_2 = \frac{3}{2}$

- idziemy do 2:

$$\begin{cases} t_1 = 1 + \frac{1}{4}t_1 + \frac{3}{4}t_2 \\ t_2 = 0 \end{cases}$$

  zatem $t_1 = \frac{4}{3}$

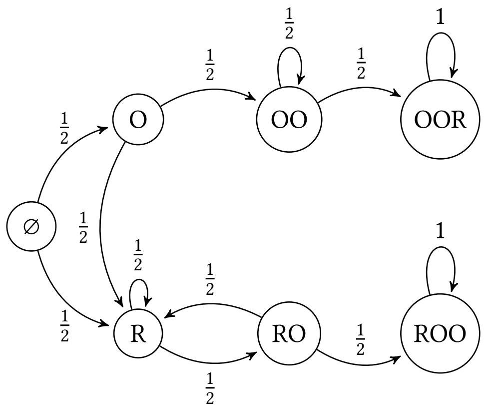
Zatem

$$r_1 = 1 + \sum_k t_k p_{1k} = 1 + t_1 p_{11} + t_2 p_{12} = 1 + t_2 p_{12} = 2\frac{1}{9}$$

$$r_2 = 1 + \sum_k t_k p_{2k} = 1 + t_1 p_{21} + t_2 p_{22} = 1 + t_1 p_{21} = 1\frac{8}{9}$$

Zadanie 7.2 *Dwóch graczy rzuca symetryczną monetą. Jeden obstawia, że najpierw pojawi się ciąg OOR, drugi - że ROO. Jakie prawdopodobieństwo wygranej ma każdy z graczy i jaki jest oczekiwany czas gry?*

Odp. Gracz 1 mógł uzbierać: ∅, *O, OO, OOR*. Gracz 2 mógł uzbierać: ∅, *R, RO, ROO* Łańcuch Markowa ma 7 stanów: ∅, *O, R, OO, RO, OOR, ROO*



Niech p_v - prawdopodobieństwo wygrania OOR pod warunkiem przebywania w stanie v. Wtedy $p_{OOR} = 1$ oraz $p_{ROO} = p_R = p_{RO} = 0$. Patrząc na to gdzie z danego stanu można wyjść mamy:

$$\begin{aligned} p_{OO} &= \frac{1}{2}p_{OO} + \frac{1}{2}p_{OOR} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{OO} \\ p_O &= \frac{1}{2}p_R + \frac{1}{2}p_{OO} = \frac{1}{2}p_{OO} \\ p_\varnothing &= \frac{1}{2}p_R + \frac{1}{2}p_O = \frac{1}{2}p_O \end{aligned}$$

Widać, że z powyższych równań otrzymamy:

$$p_O = \frac{1}{2}$$

Wtedy też otrzymamy

$$p_\varnothing = \frac{1}{4}$$

Czyli prawdopodobieństwo wygranej gracza 1 to $p_\varnothing = \frac{1}{4}$, a drugiego $1 - p_\varnothing = \frac{3}{4}$. Ma to sens, bo jak pierwsza wypadnie reszka to już gracz drugi nie może przegrać.

Oczekiwany czas gry: E_v – oczekiwany czas gry w stanie v.

$$\begin{aligned} E_{OOR} &= E_{ORR} = 0 \\ E_{OO} &= 1 + \frac{1}{2}E_{OO} + \frac{1}{2}E_{OOR} \\ E_{RO} &= 1 + \frac{1}{2}E_R + \frac{1}{2}E_{ROO} \\ E_O &= 1 + \frac{1}{2}E_{OO} + \frac{1}{2}E_R \\ E_R &= 1 + \frac{1}{2}E_R + \frac{1}{2}E_{RO} \\ E_\varnothing &= 1 + \frac{1}{2}E_O + \frac{1}{2}E_R \end{aligned} \implies \begin{aligned} E_{OOR} &= E_{ORR} = 0 \\ E_{OO} &= 2 \\ E_{RO} &= 1 + \frac{1}{2}E_R \\ E_O &= 1 + 1 + \frac{1}{2}E_R \\ \frac{1}{2}E_R &= 1 + \frac{1}{2}E_{RO} \\ E_\varnothing &= 1 + \frac{1}{2}E_O + \frac{1}{2}E_R \end{aligned}$$

Rozwiązanie to

$$\begin{aligned} E_{OO} &= 2 \\ E_{RO} &= 4 \\ E_O &= 5 \\ E_R &= 6 \\ E_\varnothing &= 6.5 \longrightarrow \text{czas gry} \end{aligned}$$

Zadanie 7.3 *Na szalce 2×2 hodujemy bakterie. Każde pole może zawierać jedną bakterię. Początkowo kolonia składa się z jednej bakterii. Co sekundę (jednocześnie) każda bakteria umiera z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, a na każdym z pustych pól sąsiadujących w poprzedniej sekundzie z co najmniej jedną bakterią z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ pojawia się nowa bakteria. Oblicz oczekiwany czas życia kolonii i prawdopodobieństwo tego, że kolonia kiedykolwiek zapełni całą szalkę.*

Odp. Jest 5 stanów odpowiadających liczbie bakterii: $\mathcal{M} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Macierz przejścia w łańcuchu Markova $\mathcal{M}$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

$$p_{1\to 0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$
$$p_{1\to 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{8}$$
$$p_{1\to 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{8}$$
$$p_{1\to 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$p_{2\to 0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$
$$p_{2\to 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{1}{4}$$
$$p_{2\to 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 = \frac{3}{8}$$
$$p_{2\to 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{1}{4}$$
$$p_{2\to 4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

Oczekiwany czas życia koloni: $T_{b,a} = \sum_{c \neq a} p_{b,c} \cdot T_{c,a} + 1$. My chcemy policzyć $T_{1,0}$.

$$\begin{cases} T_{1,0} &= p_{11}T_{10} + p_{12}T_{20} + p_{13}T_{30} + p_{14}T_{40} + 1 \\ T_{2,0} &= p_{21}T_{10} + p_{22}T_{20} + p_{23}T_{30} + p_{24}T_{40} + 1 \\ T_{3,0} &= T_{2,0} = T_{4,0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{1,0} &= \frac{3}{8}T_{1,0} + \frac{3}{8}T_{2,0} + \frac{1}{8}T_{3,0} + 1 \\ T_{2,0} &= \frac{1}{4}T_{1,0} + \frac{3}{8}T_{2,0} + \frac{1}{4}T_{3,0} + \frac{1}{16}T_{4,0} + 1 \\ T_{3,0} &= T_{2,0} = T_{4,0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{1,0} &= \frac{3}{8}T_{1,0} + \frac{3}{8}T_{2,0} + \frac{1}{8}T_{2,0} + 1 \\ T_{2,0} &= \frac{1}{4}T_{1,0} + \frac{3}{8}T_{2,0} + \frac{1}{4}T_{2,0} + \frac{1}{16}T_{2,0} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{8}T_{1,0} &= \frac{1}{2}T_{2,0} + 1 \\ \frac{5}{16}T_{2,0} &= \frac{1}{4}T_{1,0} + 1 \end{cases}$$

$$\frac{5}{8}T_{1,0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{5}\left(\frac{1}{4}T_{1,0} + 1\right) + 1$$

$$\left(\frac{5}{8} - \frac{2}{5}\right) T_{1,0} = \frac{13}{5}$$

$$T_{1,0} = \frac{13}{5} \cdot \frac{40}{9} = \frac{104}{9} \approx 11.5$$

Prawdopodobieństwo, że hodowla zapełni szalkę: $f_{1,4} =?$.

$$f_{b,a} = \sum_{c \neq a} p_{b,c} \cdot f_{c,a} + p_{b,a}$$

$$\begin{cases} f_{0,4} & = 0 \quad \text{(z zera nie można wyjść)} \\ f_{1,4} & = p_{1,0}f_{0,4} + p_{1,1}f_{1,4} + p_{1,2}f_{2,4} + p_{1,3}f_{3,4} + p_{1,4} \\ f_{2,4} & = p_{2,0}f_{0,4} + p_{2,1}f_{1,4} + p_{2,2}f_{2,4} + p_{2,3}f_{3,4} + p_{2,4} \\ f_{3,4} & = f_{2,4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{1,4} & = \frac{3}{8}f_{1,4} + \frac{3}{8}f_{2,4} + \frac{1}{8}f_{2,4} \\ f_{2,4} & = \frac{1}{4}f_{1,4} + \frac{3}{8}f_{2,4} + \frac{1}{4}f_{2,4} + \frac{1}{16} \end{cases}$$

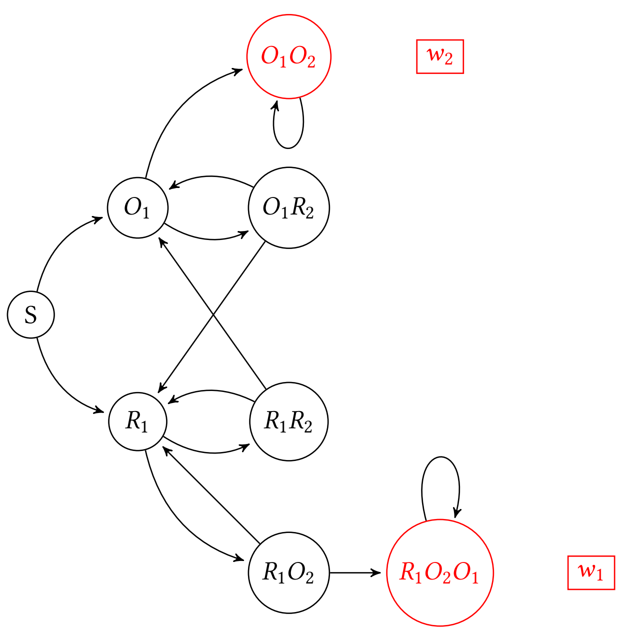
$$\begin{cases} \frac{5}{8}f_{1,4} & = \frac{4}{8}f_{2,4} \\ \frac{3}{8}f_{2,4} & = \frac{1}{4}f_{1,4} + \frac{1}{16} \end{cases}$$

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{4}f_{1,4} = \frac{1}{4}f_{1,4} + \frac{1}{16}$$

$$(15 - 8)\, f_{1,4} = 2$$

$$f_{1,4} = \frac{2}{7} < 1$$

Zadanie 7.4 *Dwaj gracze rzucają na przemian symetryczną monetą. Wygrywa ten, który wyrzuci orła bezpośrednio po orle wyrzuconym przez poprzednika. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wygra pierwszy gracz? Jaka jest oczekiwana liczba rzutów w całej grze?*
Odp.



Prawdopodobieństwo, że wygra gracz 1: $f_{s,w_1} =?$

$$f_{s,w_1} = \sum_{c\in S\setminus a} p_{s,c} \cdot f_{c,w_1} + \underbrace{p_{s,w_1}}_{=0} = p_{s,o_1}f_{o_1,w_1} + p_{s,r_1}f_{r_1,w_1} = \frac{1}{2}f_{o_1,w_1} + \frac{1}{2}f_{r_1,w_1}$$

$$f_{o_1,w_1} = \sum o_{o_1,c}f_{c,w_1} + \underbrace{p_{o_1,w_1}}_{=0} = p_{o_1,o_1o_2}\underbrace{f_{o_1o_2,w_1}}_{=0} + p_{o_1,o_1r_2}f_{o_1r_2,w_1} = \frac{1}{2}f_{o_1r_2,w_1}$$

$$f_{o_1r_2,w_1} = \sum p_{o_1r_2,c}f_{c,w_1} = \frac{1}{2}f_{o_1,w_1} + \frac{1}{2}f_{r_1,w_1}$$

$$f_{o_1o_2,w_1} = \sum p_{o_1o_2,c}f_{c,w_1} = p_{o_1o_2,o_1o_2}f_{o_1o_2,w_1} = f_{o_1o_2,w_2} \equiv 0 \text{ (game over)}$$

$$f_{r_1,w_1} = \frac{1}{2}f_{r_1r_2,w_1} + \frac{1}{2}f_{r_1o_2,w_1}$$

$$f_{r_1r_2,w_1} = \frac{1}{2}f_{r_1,w_1} + \frac{1}{2}f_{o_1,w_1}$$

$$f_{r_1o_2,w_1} = \frac{1}{2}f_{r_1,w_1} + \frac{1}{2}\underbrace{f_{w_1,w_1}}_{=1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_{r_1,w_1}$$

$$\begin{cases} f_{s,w_1} & = \frac{1}{2}f_{o_1,w_1} + \frac{1}{2}f_{r_1,w_1} \\ f_{o_1,w_1} & = \frac{1}{2}f_{o_1r_2,w_1} \\ f_{o_1r_2,w_1} & = \frac{1}{2}f_{o_1,w_1} + \frac{1}{2}f_{r_1,w_1} \\ f_{r_1,w_1} & = \frac{1}{2}f_{r_1r_2,w_1} + \frac{1}{2}f_{r_1o_2,w_1} \\ f_{r_1r_2,w_1} & = \frac{1}{2}f_{r_1,w_1} + \frac{1}{2}f_{o_1,w_1} \\ f_{r_1o_2,w_1} & = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_{r_1,w_1} \end{cases}$$

Możemy to zapisać uproszczonych oznaczeń:

$$\begin{cases} a & = \frac{1}{2}(b+c) \\ b & = \frac{1}{2}d \\ d & = \frac{1}{2}(b+c) \\ c & = \frac{1}{2}(e+f) \\ e & = \frac{1}{2}(c+b) \\ f & = \frac{1}{2}(1+c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a & = \frac{1}{2}(b+c) = d = e \\ b & = \frac{1}{2}d \\ c & = \frac{1}{2}(e+f) \\ f & = \frac{1}{2}(1+c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a & = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}a+c) \\ c & = \frac{1}{2}(a+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{4}a & = \frac{1}{2}c \\ \frac{3}{4}c & = \frac{1}{2}a+\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\frac{3}{4}a = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\right)$$

$$\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)a = \frac{1}{6}$$

$$a = \frac{2}{5}$$

Oczekiwany czas gry - t_μ - dojście do w_1 lub w_2 startując z μ.

$$t_{r_1o_2o_1} = 0 = t_{o_1o_2}$$

$$\begin{cases} t_{r_1o_2} & = \frac{1}{2}t_{r_1o_2o_1} + \frac{1}{2}t_{r_1} + 1 \\ t_{r_1} & = \frac{1}{2}t_{r_1r_2} + \frac{1}{2}t_{r_1o_2} + 1 \\ t_{r_1r_2} & = \frac{1}{2}t_{r_1} + \frac{1}{2}t_{o_1} + 1 \\ t_{o_1r_2} & = \frac{1}{2}t_{r_1} + \frac{1}{2}t_{o_1} + 1 \\ t_{o_1} & = \frac{1}{2}t_{o_1o_2} + \frac{1}{2}t_{o_1r_2} + 1 \\ t_s & = \frac{1}{2}t_{o_1} + \frac{1}{2}t_{r_1} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_{r_1o_2} &= \frac{1}{2}t_{r_1} + 1 \\ t_{r_1} &= \frac{1}{2}t_{r_1r_2} + \frac{1}{2}t_{r_1o_2} + 1 \\ t_{r_1r_2} &= \frac{1}{2}t_{r_1} + \frac{1}{2}t_{o_1} + 1 \\ t_{o_1} &= \frac{1}{2}t_{o_1r_2} + 1 \\ t_s &= \frac{1}{2}t_{o_1} + \frac{1}{2}t_{r_1} + 1 \\ t_{o_1r_2} &= t_{r_1r_2} \end{cases}$$

Podstawiając równanie 1 do 2, 3 do 2 oraz 4, oraz 6 do 4 otrzymamy:

$$\begin{cases} t_{r_1} &= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}t_{r_1} + \frac{1}{2}t_{o_1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t_{r_1} + 1\right) \\ t_{o_1} &= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}t_{r_1} + \frac{1}{2}t_{o_1}\right) \\ t_s &= 1 + \frac{1}{2}t_{o_1} + \frac{1}{2}t_{r_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_{r_1} &= 2 + \frac{1}{2}t_{r_1} + \frac{1}{4}t_{o_1} \\ t_{o_1} &= \frac{3}{2} + \frac{1}{4}t_{r_1} + \frac{1}{4}t_{o_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_{r_1} &= 4 + \frac{1}{2}t_{o_1} \\ t_{o_1} &= 2 + \frac{1}{3}t_{r_1} \end{cases}$$

$$t_{r_1} = 4 + \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{3}t_{r_1}\right)$$

$$\frac{5}{6}t_{r_1} = 4 + 1 \implies t_{r_1} = 6$$

$$\begin{cases} t_{r_1} &= 6 \\ t_{o_1} &= 4 \\ t_s &= 1 + \frac{1}{2}(4 + 6) = 6 \end{cases}$$

Oczekiwany czas gry wynosi $t_s = 6$

Zadanie 7.5 *Cztery mrówki znajdują się w jednym wierzchołku czworościanu. Co sekundę każda z nich z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ przechodzi do sąsiedniego wierzchołka lub pozostaje na miejscu. Jaka jest oczekiwana liczba zajętych przez mrówki wierzchołków po upływie 1 sekundy? Jaki jest oczekiwany czas pierwszego zajęcia wszystkich wierzchołków jednocześnie?*

Odp. Są następujące możliwości obsadzeń wierzchołków (ile wierzchołków jest zajętych): $\mathcal{M} = \{1, 2, 3, 4\}$

$$M = \frac{1}{4^4}\begin{pmatrix} 4 & 84 & 144 & 24 \\ 4 & 84 & 144 & 24 \\ 4 & 84 & 144 & 24 \\ 4 & 84 & 144 & 24 \end{pmatrix}$$

Prawdopodobieństwo przejść nie zależą od stanu początkowego :

$$\begin{cases} p_{a\to 1} &= \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^4} \cdot 3 = \frac{4}{4^4} \\ p_{a\to 2} &= \binom{4}{2} \cdot \frac{1}{4^2} \cdot 4 \cdot \binom{2}{2} \cdot \frac{1}{4^2} \cdot 3 + \binom{4}{1} \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \binom{3}{3} \cdot \frac{1}{4^3} \cdot 3 = \frac{84}{4^4} \\ p_{a\to 3} &= \binom{4}{1} \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \binom{2}{2} \cdot \frac{1}{4^2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2!} = \frac{144}{4^4} \\ p_{a\to 4} &= \frac{4!}{4^4} \end{cases}$$

Dla $p_{a\to 2}$ wybieramy parę mrówek, one idą do jednego z 4 wierzchołków, potem wybieramy pozostałe mrówki i one idą do innego wierzchołka. Albo wybieramy 3 mrówki i one idą do jednego z 4 wierzchołków a pozostała 1 idzie do jednego z pozostałych 3. Ponieważ pary są nierozróżnialne to dzielimy przez 2!.

Dla $p_{a\to 3}$ wybieramy jedną mrówkę, która idzie do jednego z 4 wierzchołków, potem wybieramy jedną mrówkę z pozostałych 3 i ona idzie do jednego z pozostałych trzech wierzchołków, a na końcu pozostała para idzie do jednego z 2 pozostałych wierzchołków. Dzielimy na 2! bo nie rozróżniamy dwóch pojedynczych mrówek.
Oczekiwana liczba zajęcia przez mrówki wierzchołków po 1s:

$$E_n = \sum_{n=1}^{4} n \cdot p_{a\to n}$$

$$E_n = 1 \cdot \frac{4}{4^4} + 2 \cdot \frac{84}{4^4} + 3 \cdot \frac{144}{4^4} + 4 \cdot \frac{24}{4^4} = \frac{700}{4^4} \approx 2.7$$

Oczekiwany czas zajęcia (pierwszego) wszystkich wierzchołków: T_{14} =?

$$\begin{cases} T_{14} &= p_{11}T_{14} + p_{12}T_{24} + p_{13}T_{34} + 1 = 1 + \frac{1}{4^4}\left(4T_{14} + 84T_{24} + 144T_{34}\right) \\ T_{24} &= p_{21}T_{14} + p_{22}T_{24} + p_{23}T_{34} + 1 = T_{14} \\ T_{24} &= p_{31}T_{14} + p_{32}T_{24} + p_{33}T_{34} + 1 = T_{14} \end{cases}$$

$$T_{14} = 1 + \frac{1}{4^4}\left(4T_{14} + 84T_{14} + 144T_{14}\right) = 1 + \frac{232}{4^4}T_{14} = 1 + \frac{58}{4^3}T_{14}$$

$$(64 - 58)T_{14} = 64$$

$$T_{14} = \frac{64}{6} \approx 10.7$$

Zadanie 7.6 *Dwie cząstki znajdują się w przeciwległych wierzchołkach sześcianu. Co sekundę każda z nich z prawdopodobieństwem* $\frac{1}{4}$ *przechodzi do sąsiedniego wierzchołka lub pozostaje na miejscu. Jaki jest oczekiwany czas kolizji cząstek (tzn. spotkania cząstek w jednym wierzchołku)?*

Odp.

$$d \in \{0, 1, 2, 3\} \quad \text{– odległość w krokach}$$

$d = 0$ oznacza, że są w tym samym wierzchołku, $d = 1$, że są na tej samej krawędzi, $d = 2$, że są na tej samej ścianie.

$$\begin{cases} p_{3\to 3} &= \frac{3}{2^4} + \frac{1}{2^4} = \frac{4}{2^4} \\ p_{3\to 2} &= \frac{3}{2^4} \cdot 2 \\ p_{3\to 1} &= \frac{1}{2^4} \cdot \left[\binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1}\right] \\ p_{3\to 0} &= 0 \\ \\ p_{2\to 3} &= \frac{1}{2^4} \cdot 1 \cdot 2 \\ p_{2\to 2} &= \frac{1}{2^4} \cdot 8 \\ p_{2\to 1} &= \frac{1}{2^4} \cdot (2 \cdot 2) \\ p_{2\to 0} &= \frac{1}{2^4} \cdot 2 \\ \\ p_{1\to 3} &= \frac{1}{2^4} \cdot 2 \\ p_{1\to 2} &= \frac{1}{2^4} \cdot (2 + 2) \\ p_{1\to 1} &= \frac{1}{2^4} \cdot 8 \\ p_{1\to 0} &= \frac{1}{2^4} \cdot (1 + 1) \\ \\ p_{0\to 3} &= 0 \\ p_{0\to 2} &= \frac{1}{2^4} \cdot (3 \cdot 2) \\ p_{0\to 1} &= \frac{1}{2^4} \cdot (3 \cdot 2) \\ p_{0\to 0} &= \frac{1}{2^4} \cdot (1 + 3) \end{cases}$$

$$M = \frac{1}{2^4}\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \\ 0 & 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Niech T_v: oczekiwany czas kolizji startując w stanie v. Wtedy

$$\begin{cases} T_3 = 1 + p_{3,3}T_3 + p_{3,2}T_2 + p_{3,1}T_1 \\ T_2 = 1 + p_{2,3}T_3 + p_{2,2}T_2 + p_{2,1}T_1 \\ T_1 = 1 + p_{1,3}T_3 + p_{1,2}T_2 + p_{1,1}T_1 \\ T_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_3 = 1 + \frac{4}{16}T_3 + \frac{6}{16}T_2 + \frac{6}{16}T_1 \\ T_2 = 1 + \frac{2}{16}T_3 + \frac{8}{16}T_2 + \frac{4}{16}T_1 \\ T_1 = 1 + \frac{2}{16}T_3 + \frac{4}{16}T_2 + \frac{8}{16}T_1 \\ T_0 = 0 \end{cases}$$

Można rozwiązać w Mathematice. Wynik

$$T_3 = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$

Zadanie 7.7 *Przy okrągłym stole siedzi trzech graczy A, B, C, każdy z jednym żetonem. W każdym kroku gry, jednocześnie każdy gracz z co najmniej jednym żetonem z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ przekazuje żeton graczowi po prawej. Grę wygrywa gracz, który zgromadzi wszystkie żetony. Ile wynosi oczekiwany czas gry?*

Odp. Niech (a, b, c) oznacza ile monet mają gracze (odpowiednio) A,B,C. Wiemy, że $a + b + c = 3$. Wszystkich możliwych trójek jest 10. Podzielmy je na 4 stany tak, że

$$\begin{aligned} 1 &= \{(1,1,1)\}, \\ 2R &= \{(1,2,0),(2,0,1),(0,1,2)\} \\ 2L &= \{(2,1,0),(1,0,2),(0,2,1)\} \\ 3 &= \{(3,0,0),(0,3,0),(0,0,3)\} \end{aligned}$$

Stan $2R$ oznacza, że gracz z dwoma monetami siedzi po prawej stornie gracza z 1 monetą, stan $2L$ odwrotnie. Wtedy

$$p_{1,1} = \frac{2}{8} \qquad p_{2L,1} = \frac{1}{4}$$
$$p_{1,2L} = \frac{3}{8} \qquad p_{2L,2L} = \frac{2}{4}$$
$$p_{1,2R} = \frac{3}{8} \qquad p_{2L,2R} = \frac{1}{4}$$
$$p_{1,3} = 0 \qquad p_{2L,3} = 0$$

$$p_{2R,1} = \frac{1}{4} \qquad p_{3,1} = 0$$
$$p_{2R,2L} = \frac{1}{4} \qquad p_{3,2L} = \frac{1}{2}$$
$$p_{2R,2R} = \frac{1}{4} \qquad p_{3,2R} = 0$$
$$p_{2R,3} = \frac{1}{4} \qquad p_{3,3} = \frac{1}{2}$$

Macierz przejścia M

$$M = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Oczekiwany czas gry startując ze stanu v: T_v. Układ równań do rozwiązania

$$\begin{cases} T_1 = 1 + p_{1,1}T_1 + p_{1,2R}T_{2R} + p_{1,2L}T_{2L} \\ T_{2L} = 1 + p_{2L,1}T_1 + p_{2L,2L}T_{2L} + p_{2L,2R}T_{2R} \\ T_{2R} = 1 + p_{2R,1}T_1 + p_{2R,2R}T_{2R} + p_{2R,2L}T_{2L} \\ T_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1 = 1 + \frac{2}{8}T_1 + \frac{3}{8}T_{2R} + \frac{3}{8}T_{2L} \\ T_{2L} = 1 + \frac{1}{4}T_1 + \frac{1}{4}T_{2R} + \frac{1}{2}T_{2L}th \\ T_{2R} = 1 + \frac{1}{4}T_1 + \frac{1}{4}T_{2R} + \frac{1}{4}T_{2L} \\ T_3 = 0 \end{cases}$$

Można rozwiązać w Mathematice albo w Wolframie. Odpowiedź to

$$T_1 = \frac{164}{15} \approx 10.9$$

Zadanie 7.8 [1] *Gracz rozpoczyna grę z kapitałem k zł. W każdym kroku gry wygrywa 1zł z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{2}$, i z tym samym prawdopodobieństwem $1 - p = \frac{1}{2}$ przegrywa 1zł. Gracz kończy grę, gdy albo wygra fortunę (= n zł) albo zbankrutuje. Oblicz:*

1. *prawdopodobieństwo wygrania fortuny, oraz*
2. *średnią liczbę kroków do zakończenia gry.*

Odp. Stany procesu to kaptiał w posiadaniu gracza A czyli $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Macierz przejścia M ma postać

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} p_0 & = 0 \\ p_n & = 1 \\ p_1 & = \frac{1}{2}p_2 \\ p_{n-1} & = \frac{1}{2}p_{n-2} + \frac{1}{2} \\ p_k & = \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1} \quad \forall_{2 \le k \le n-2} \end{cases}$$

Możemy przekształcić ostatnie równanie do postaci

$$p_{k+1} - p_k = p_k - p_{k-1}$$

Wypisując dla kilku pierwszych k:

$$p_2 - p_1 = p_1 - p_0 = p_1$$
$$p_3 - p_2 = p_2 - p_1 = p_1$$
$$p_4 - p_3 = p_3 - p_2 = p_1$$

[1] `https://mpaldridge.github.io/math2750/S03-gamblers-ruin.html`

Zatem można zauważyć, że

$$p_{i+1} - p_1 = \sum_{k=1}^{i} (p_{k+1} - p_k) = ip_1 \qquad \Longrightarrow \qquad p_{i+1} = (i+1)p_1$$

Wartość p_1 możemy znaleźć z warunku brzegowego:

$$1 = p_n = np_1 \qquad \Longrightarrow \qquad p_1 = \frac{1}{n}$$

Ostatecznie otrzymamy:

$$p_k = \frac{k}{n}$$

b) Niech d_i – oczekiwany czas gry zakładając, że startujemy w stanie i. Wtedy

$$\begin{cases} d_0 &= 0 \\ d_n &= 0 \\ d_i &= \frac{1}{2}(1 + d_{i+1}) + \frac{1}{2}(1 + d_{i-1}) = 1 + \frac{1}{2}d_{i+1} + \frac{1}{2}d_{i-1} \end{cases}$$

Możemy przepisać ostatnie równanie jako [2]

$$(d_{i+1} - d_i) = (d_i - d_{i-1}) - 2$$

Pierwsze kilka i:

$$\begin{aligned} d_2 - d_1 &= d_1 - d_0 - 2 = d_1 - 2 \\ d_3 - d_2 &= d_2 - d_1 - 2 = d_1 - 4 \\ d_4 - d_3 &= d_3 - d_2 - 2 = d_1 - 6 \\ d_{k+1} - d_k &= d_1 - 2k \end{aligned}$$

Sprytnie sumując:

$$d_{k+1} - d_1 = \sum_{i=1}^{k}(d_{i+1} - d_i) = \sum_{i=1}^{k}(d_1 - 2i) = kd_1 - 2\frac{k(k+1)}{2}$$

Wykorzystując kolejny warunek brzegowy ($d_n = 0$)

$$-d_1 = (n-1)d_1 - (n-1)n \qquad \Longrightarrow \qquad nd_1 = (n-1)n \qquad \Longrightarrow \qquad d_1 = n-1$$

Zatem

$$d_{k+1} = d_1(k+1) - k(k+1) \qquad \Longrightarrow \qquad d_{k+1} = (k+1)(n-k-1)$$

Ostatecznie

$$d_k = k(n-k)$$

Zadanie 7.9 *W dwóch komorach znajdują się cząstki, w jednej k, w drugiej n − k. W każdym kroku jedna losowo wybrana cząstka zmienia komorę. Oblicz graniczny rozkład liczby cząstek w pierwszej komorze (t.j. rozkład stacjonarny odpowiedniego łańcucha Markowa). Jaki jest średni czas powrotu dla stanu w którym wszystkie cząstki są w pierwszej komorze?*

Odp. Macierz przejścia:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{n} & 0 & \frac{n-1}{n} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{n} & 0 & \frac{n-2}{n} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[2] jest to równanie różnicowe, studenci teoretycznie powinni wiedzieć jak to rozwiązać

Rozkład stacjonarny $\boldsymbol{\pi}$ dla tego łańcucha można obliczyć

$$\left(\pi_0, \pi_1 \dots \pi_n\right) M = \left(\pi_0, \pi_1 \dots \pi_n\right)$$

co daje układ równań

$$\begin{cases} \pi_0 & = \frac{1}{n}\pi_1 \\ \pi_1 & = \pi_0 + \frac{2}{n}\pi_2 \\ \pi_2 & = \frac{n-1}{n}\pi_1 + \frac{3}{n}\pi_3 \\ \pi_k & = \frac{n-(k-1)}{n}\pi_{k-1} + \frac{k+1}{n}\pi_{k+1} \\ \pi_{n-1} & = \frac{2}{n}\pi_{n-2} + \pi_n \\ \pi_n & = \frac{1}{n}\pi_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_1 & = n\pi_0 \\ \pi_2 & = \frac{n}{2}(\pi_1 - \pi_0) = \frac{n(n-1)}{2}\pi_0 \\ \pi_3 & = \frac{n}{3}(\pi_2 - \frac{n-1}{n}\pi_1) = \frac{n}{3}\pi_0(\frac{n(n-1)}{2} - (n-1)) = \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}\pi_0 \\ \pi_k & = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot k}\pi_0 \end{cases}$$

Zatem

$$\pi_k = \binom{n}{k}\pi_0$$

Wartość π_0 znajdziemy z warunku normalizacji $\sum_i \pi_i = 1$:

$$1 = \sum_i \binom{n}{i}\pi_0 = \pi_0 2^n \qquad \Longrightarrow \qquad \pi_0 = \frac{1}{2^n}$$

Ostatecznie:

$$\pi_i = \frac{1}{2^n}\binom{n}{i}$$

Do policzenia czasu powrotu do stanu 0 możemy skorzystać z twierdzenia z wykładu: jeśli są spełnione założenia z twierdzenia ergodycznego to czas powrotu $\mu_{a,a} = \frac{1}{\pi_a}$. W naszym przypadku

$$\mu_{0,0} = 2^n$$

Dla $n = 100$ i zakładając, że cząsteczka zmienia komorę co 1s to średni czas powrotu wynosi $2^{100} \sim 4 \cdot 10^{22}$ lat.