Języki, automaty i obliczenia — ćwiczenia 12

Obliczalność, częściowa obliczalność

Wykład:

- *Problem rozstrzygalny, język/funkcja obliczalna* – może być rozpoznany/a przez maszynę Turinga.
- *Problem półrozstrzygalny/częściowo rozstrzygalny, język częściowo obliczalny, częściowa funkcja obl.* – słowa z języka rozpoznawane przez maszynę Turinga, na słowach spoza maszyna się pętli.
- Istnieją problemy częściowo rozstrzygalne, ale nierozstrzygalne. Przykłady:

  HALT (Halting Problem)
  Input: maszyna Turinga $\mathcal{M}$, słowo w
  Output: czy $\mathcal{M}$ terminuje na słowie w?

  HALT_ε
  Input: maszyna Turinga $\mathcal{M}$
  Output: czy $\mathcal{M}$ terminuje na słowie pustym?

  Square Tiling
  Input: zbiór kolorów $\mathcal{C}$, zbiór kafelków $K \subseteq \mathcal{C}^4$ pokolorowanych z 4 stron, kafelki początkowe i końcowe $S, E \in K$.
  Output: czy można wykafelkować jakiś kwadrat o lewym dolnym rogu S i prawym górnym rogu E, by każde dwa sąsiednie kafelki miały na wspólnym boku zgodne kolory?

  Post Correspondence Problem
  Input: $k \in \mathbb{N}$ oraz słowa $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k$
  Output: czy istnieje niepusty ciąg indeksów $i_1, i_2, \ldots, i_n$ (ind. mogą się powtarzać) taki, że

  $$a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} = b_{i_1} b_{i_2} \ldots b_{i_n}?$$

  Grammar Universality Problem
  Input: gramatyka bezkontekstowa $\mathcal{G}$ nad alfabetem Σ
  Output: czy $L(\mathcal{G}) = \Sigma^*$?

- Istnieją problemy, których dopełnienia są częściowo rozstrzygalne, na przykład:

  Plane Quadrant Tiling
  Input: zbiór kolorów $\mathcal{C}$, zbiór kafelków $K \subseteq \mathcal{C}^4$ pokolorowanych z 4 stron, kafelek startowy $S \in K$
  Output: czy można wykafelkować całą pierwszą ćwiartkę płaszczyzny tak, by w jej lewym dolnym rogu był kafelek S i każde dwa sąsiednie kafelki miały na wspólnym boku zgodne kolory?

  Plane Tiling (Wang)
  Input: zbiór kolorów $\mathcal{C}$, zbiór kafelków $K \subseteq \mathcal{C}^4$ pokolorowanych z 4 stron
  Output: czy można wykafelkować całą pierwszą ćwiartkę płaszczyzny tak, by każde dwa sąsiednie kafelki miały na wspólnym boku zgodne kolory?

- Problem decyzyjny $\mathcal{A}$ redukuje się do problemu $\mathcal{B}$, jeśli istnieje obliczalna funkcja, która każdą instancję $\mathcal{A}$ przepisuje na instancję $\mathcal{B}$ bez zmiany odpowiedzi („tak” lub „nie”).

  Intuicyjnie: „rozwiązanie problemu $\mathcal{A}$ sprowadza się do rozwiązania problemu $\mathcal{B}$”.

1. Udowodnij: jeśli język L jest częściowo obliczalny i jego dopełnienie jest częściowo obliczalne, cały język jest obliczalny.

2. Język L jest:

- *częściowo obliczalny*, jeśli istnieje maszyna Turinga $\mathcal{M}_1$ taka, że terminuje się na słowach z L (i je akceptuje), zaś na pozostałych się zapętla;
- *rekurencyjnie przeliczalny* (*recursively enumerable*), jeśli:
  - formalnie: istnieje dwutaśmowa maszyna $\mathcal{M}_2$ taka, że druga taśma jest *output-only* i $\mathcal{M}_2$ dla pustego wejścia wypisuje $w_1\#w_2\#w_3\#\ldots$ dla $w_1, w_2, w_3, \ldots \in L$ – **wszystkich** różnych słów z języka,
  - nieformalnie: istnieje program, który wypisuje na wyjście strumień wszystkich słów z języka bez powtórzeń (choć w dowolnej kolejności).

Pokaż, że L jest częściowo obliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest rekurencyjnie przeliczalny.

3. *(NR 180)* Czy następujące problemy dotyczące gramatyk są rozstrzygalne?

a) Palindrome in Grammar
Input: gramatyka bezkontekstowa $\mathcal{G}$ nad alfabetem Σ
Output: czy $L(\mathcal{G})$ zawiera palindrom?

b) Grammar Intersection Emptiness
Input: gramatyki bezkontekstowe $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ nad alfabetem Σ
Output: czy $L(\mathcal{G}_1) \cap L(\mathcal{G}_2) = \varnothing$?

c) Grammar Unambiguity
Input: gramatyka bezkontekstowa $\mathcal{G}$ nad alfabetem Σ
Output: czy $\mathcal{G}$ jest gramatyką jednoznaczną?

d) Grammar Intersection Context-Free Testing
Input: gramatyki bezkontekstowe $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ nad alfabetem Σ
Output: czy $L(\mathcal{G}_1) \cap L(\mathcal{G}_2)$ jest językiem bezkontekstowym?

e) Grammar With Quadruple Word
Input: gramatyka bezkontekstowa $\mathcal{G}$ nad alfabetem Σ
Output: czy istnieje słowo $w \in \Sigma^*$ takie, że $wwww \in L(\mathcal{G})$?

4. Czy następujące problemy dotyczące maszyn Turinga są rozstrzygalne?

a) Input: maszyna Turinga $\mathcal{M}$, która jeśli choć raz przesunie się w lewo, to już nigdy nie idzie w prawo; słowo w
Output: czy $\mathcal{M}$ terminuje na słowie w?

b) Turing Machine Language Emptiness
Input: maszyna Turinga $\mathcal{M}$
Output: czy $L(\mathcal{M}) = \varnothing$?