Języki, automaty i obliczenia — ćwiczenia 11

Maszyny Turinga cd.

Wykład: *maszyny Turinga, obliczalność, częściowa obliczalność.*

1. *(NR 162b)* Jak skonstruować maszynę Turinga, która oblicza funkcję $f(n) = \lceil \log_2 n \rceil$, gdy $n \geqslant 1$ jest podane na wejściu unarnie?

2. Wykaż, że maszyna Turinga z jedną jednostronnie nieskończoną taśmą jest równoważna maszynie Turinga z dwustronnie nieskończoną taśmą.

3. *(NR 170)* Opis automatów ze stosem naturalnie uogólnia się na więcej niż jeden stos: każda tranzycja jest uzależniona od tego, co jest na górze wszystkich stosów i od następnej litery do przeczytania. Tranzycja może zrzucić najwyższe elementy z wybranych stosów i wrzucić dowolne elementy na szczyty wybranych stosów, na przykład: $q_1 \xrightarrow{\text{pop}_1(x),\ \text{pop}_2(y),\ c,\ \text{push}_1(x,y,z)} q_2$.

Wykaż, że automat z dwoma stosami jest równoważny maszynie Turinga.

4. *(NR 167a)* Maszyna Turinga nad alfabetem $\{0, 1, \mathtt{B}\}$ jest *write-once*, gdy pozwala tylko na nadpisywanie blanków B (tj. nie wolno zamazywać na żadnej taśmie symboli 0 i 1). Wykaż, że maszyna *write-once* z dwoma taśmami jest równoważna zwykłej maszynie Turinga z jedną taśmą.

Dla chętnych (⋆): wykaż, że jednotaśmowa maszyna *write-once* rozpoznaje dokładnie języki regularne.

5. *(NR 171)* Stos w automatach stosowych podmieńmy na kolejkę FIFO (*first-in first-out*). Formalnie, każda tranzycja jest jednej z trzech postaci:

- $q_1 \xrightarrow{a} q_2$ – przeczytaj literę a.
- $q_1 \xrightarrow{\text{pop}(s)} q_2$ – zrzuć z przodu kolejki symbol stosowy; musi to być s.
- $q_1 \xrightarrow{\text{push}(s)} q_2$ – wrzuć na koniec kolejki symbol stosowy s.

Wykaż, że maszyny Turinga są równoważne automatom kolejkowym.

6. Język L jest:

- *częściowo obliczalny*, jeśli istnieje maszyna Turinga $\mathcal{M}_1$ taka, że terminuje się na słowach z L (i je akceptuje), zaś na pozostałych się zapętla;
- *rekurencyjnie przeliczalny*, jeśli:
  - formalnie: istnieje dwutaśmowa maszyna $\mathcal{M}_2$ taka, że druga taśma jest *output-only* i $\mathcal{M}_2$ dla pustego wejścia wypisuje $w_1\#w_2\#w_3\#\dots$ dla $w_1, w_2, w_3, \ldots \in L$ – **wszystkich** różnych słów z języka,
  - nieformalnie: istnieje program, który wypisuje na wyjście strumień wszystkich słów z języka bez powtórzeń (choć w dowolnej kolejności).

Pokaż, że L jest częściowo obliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest rekurencyjnie przeliczalny.