Języki, automaty i obliczenia — ćwiczenia 10

Maszyny Turinga

Wykład: *maszyny Turinga.*

- Definicja maszyny:
  - A – alfabet wejściowy, $B = A \cup \{\text{\textvisiblespace}\}$ – alfabet roboczy. Znak $\text{\textvisiblespace}$ nazywamy blankiem.
  - Q – skończony zbiór stanów, wraz ze stanem początkowym $q_0 \in Q$ i akceptującymi $F \subseteq Q$.
  - Automat działa na jednostronnie nieskończonej taśmie z pojedynczym wskaźnikiem. Początkowo na taśmie jest wpisane słowo wejściowe, a wskaźnik stoi na jego początku. Pozostała część taśmy jest wypełniona blankami.
  - Automat decyduje, co zrobić, na podstawie obecnego stanu i znaku pod wskaźnikiem. Formalnie, przejścia są postaci: $q_1, c_1 \; : \; q_2, c_2, \leftarrow$ (lub $\rightarrow$), co znaczy:
    * Jeśli jesteś w stanie q_1, a pod wskaźnikiem masz literkę c_1...
    * ...możesz zmienić stan na q_2, a literkę pod wskaźnikiem na c_2...
    * ...i przesunąć wskaźnik w lewo (gdy $\leftarrow$) lub w prawo (gdy $\rightarrow$).
  - Automat akceptuje, gdy dojdzie do stanu akceptującego.
- Wiele równoważnych wersji maszyny:
  - Taśma obustronnie nieskończona zamiast jednostronnie.
  - Wiele taśm; wtedy pierwsza jest wypełniona słowem wejściowym, a pozostałe są początkowo puste.
  - Deterministyczna maszyna: aktualny stan i litera pod wskaźnikiem jednoznacznie wyznacza następny ruch, jeśli istnieje.
  - Tylko jeden stan akceptujący.
  - Wskaźnik może zostać w miejscu ($\circlearrowleft$ oprócz $\leftarrow$ i $\rightarrow$).
  - ...
- Język $L(\mathcal{M})$ rozpoznawany przez maszynę $\mathcal{M}$ to zbiór słów wejściowych, na których maszyna się zatrzymuje w stanie akceptującym („akceptuje” słowo).
  - Na słowach spoza języka maszyna zatrzymuje się w stanie odrzucającym, z którego nie ma wyjścia („odrzuca” słowo) albo się zapętla.
- Język $L(\mathcal{M})$ jest obliczalny, jeśli istnieje maszyna Turinga, która akceptuje każde słowo z języka i odrzuca każde słowo spoza języka.
- Język $L(\mathcal{M})$ jest częściowo obliczalny, jeśli dodatkowo maszyna może się zapętlać na słowach spoza języka.
- Istnieją języki częściowo obliczalne, lecz nie obliczalne.
  - Przykład: język takich par $(\mathcal{M}, w)$, że $\mathcal{M}$ akceptuje słowo w.

1. *(wprowadzające)* Skonstruuj maszynę Turinga, która rozpoznaje liczby binarne podzielne przez 3.

2. *(NR 160a)* Skonstruuj jednotaśmową maszynę Turinga, która rozpoznaje słowa postaci $\{ww : w \in \{0,1\}^*\}$.

Jak prościej skonstruować maszynę dwutaśmową? A deterministycznie?

3. *(NR 161)* Zaprojektuj niedeterministyczną maszynę Turinga, która rozwiązuje następujący problem decyzyjny:

Wejście: graf skierowany G na n wierzchołkach $0, 1, \ldots, n-1$ zadany poprzez słowo binarne długości n^2; w G istnieje krawędź $u \to v$ wtw. gdy $n \cdot u + v + 1$-sza litera wejściowego słowa (numerujemy od 1) jest równa 1.

Wyjście: czy graf ma jakąkolwiek ścieżkę zaczynającą się w 0 i kończącą w $n-1$?

4. *(NR 162a)* Na wejściu maszyny znajduje się liczba $n \geqslant 1$ zapisana w postaci unarnej (n jedynek). Wyprodukuj jednotaśmową maszyną Turinga 2^n jedynek.

5. *(NR 170)* Opis automatów ze stosem naturalnie uogólnia się na więcej niż jeden stos: każda tranzycja jest uzależniona od tego, co jest na górze wszystkich stosów i od następnej litery do przeczytania. Tranzycja może zrzucić najwyższe elementy z wybranych stosów i wrzucić dowolne elementy na szczyty wybranych stosów, na przykład: $q_1 \xrightarrow{\mathrm{pop}_1(x),\ \mathrm{pop}_2(y),\ c,\ \mathrm{push}_1(x,y,z)} q_2$.

Wykaż, że automat z dwoma stosami jest równoważny maszynie Turinga.