Języki, automaty i obliczenia — ćwiczenia 9

Kolekcja zadań

Wykład: *algorytmy dla gramatyk bezkontekstowych.*

- Algorytm dla pustości gramatyk.
- Nierozstrzygalność algorytmu dla pełności gramatyk.
- Algorytm CYK (Cocke'a-Youngera-Kasamiego) sprawdzania przynależności słowa do języka wyznaczanego przez gramatykę bezkonktestową.

1. *(NR 18+)* Czy poniższy język jest: (a) regularny, (b) bezkontekstowy?

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} : (a_1 a_2 \dots a_n)_2 \cdot (b_1 b_2 \dots b_n)_2 = (c_1 c_2 \dots, c_n)_2 \right\}.$$

2. *(NR 142)* Niech X, Y — regularne. Czy język $\cup_{n \in \mathbb{N}} (X^n \cap Y^n)$ jest: (a) regularny, (b) bezkontekstowy?

3. *(NR 139)* Skonstruuj język bezkontekstowy L taki, że język $\frac{1}{2}L = \{x \;:\; \exists y\, |x| = |y| \wedge xy \in L\}$ nie jest bezkontekstowy.

4. *(Zad. domowe 2019)* Skonstruuj algorytm rozwiązujący poniższy problem:
Wejście: gramatyka bezkontekstowa $\mathcal{G}$ i jej nieterminal X
Wyjście: czy istnieje drzewo parsowania w $\mathcal{G}$ takie, że na każdej ścieżce korzeń-liść nieterminal X występuje parzyście wiele razy?

Definicja. Automat ze stosem nazwiemy *deterministycznym*, jeśli spełnia on dwa warunki:

- dla każdego stanu $q \in Q$, litery $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ i litery alfabetu stosowego $s \in \Gamma$, istnieje **co najwyżej jedno** przejście postaci $q \xrightarrow{\text{pop}(s),\ a,\ \text{push}(s_1, s_2, \dots, s_k)} q'$,
- jeśli dla $q \in Q$, $s \in \Gamma$ istnieje przejście postaci $q \xrightarrow{\text{pop}(s),\ \varepsilon,\ \text{push}(\dots)} q'$, to **nie istnieje** przejście postaci $q \xrightarrow{\text{pop}(s),\ a,\ \text{push}(\dots)} q'$ dla żadnego $a \in \Sigma$.

Intuicyjnie, automat nie ma wyboru, co robić: jego aktualny stan $q \in Q$, aktualna litera słowa $a \in \Sigma$ i aktualny szczyt stosu $s \in \Gamma$ jednoznacznie wyznaczają następny ruch automatu (lub stwierdzają porażkę).

5. Wykaż, że język $\{a^n b^n \;:\; n \in \mathbb{N}\} \cup \{a^n b^{2n} \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ nie może być rozpoznany przez deterministyczny automat ze stosem.

6. *(NR 50)* Język nad alfabetem $\{0, 1\}$ o następującej własności: *dowolny infiks długości nie większej niż* 7 *ma co najwyżej* 4 *jedynki* jest regularny. Ile stanów ma minimalny automat deterministyczny rozpoznający ten język?

7. Czy poniższy problem równoważności gramatyk jest rozstrzygalny?
Wejście: język A i dwie gramatyki bezkontekstowe $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ zdefiniowane na tym języku
Wyjście: czy $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{H})$?