Języki, automaty i obliczenia — ćwiczenia 8

Automaty ze stosem cd.

1. *(NR 125, 126)* Stwórz niedeterministyczny automat ze stosem dla następujących języków:

(b) słów, które zawierają dwukrotnie więcej a niż b,

(c) słów, które nie zawierają dokładnie dwukrotnie więcej a niż b,

(d) $\{\mathrm{bin}(n)\$\mathrm{bin}(n+1)^R \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.

(e) ($\star$) słowa nad alfabetem $\{a, b\}$, które nie są postaci ww dla $w \in \{a, b\}^*$.

Na wykładzie został pokazany szkic równoważności gramatyk bezkontekstowych oraz niedeterministycznych automatów ze stosem. W szkicu zabrakło dwóch dowodów, które zebrane są tutaj.

2. Wykaż, że każdą gramatykę bezkontekstową można przepisać do postaci, w której każda produkcja jest jednej z postaci:

$$
\begin{aligned}
&X \to X_1X_2X_3\dots X_k \qquad (X_1,\dots,X_k \text{ – nieterminale}),\\
&X \to a \qquad (a \text{ – terminal}),\\
&X \to \varepsilon.
\end{aligned}
$$

3. *(podobne do NR 128)* Wykaż, że każdy automat niedeterministyczny ze stosem (PDA) jest równoważny pewnemu PDA, który:

- ma tylko jeden stan,
- akceptuje poprzez zdjęcie wszystkich symboli ze stosu.

4. *(NR 131)* Dany jest automat niedeterministyczny ze stosem rozpoznający język L. Skonstruuj automaty, które rozpoznają języki:

(a) $\mathrm{Prefix}(L) = \{v \,:\, \exists_w\, vw \in L\}$,

(b) $\mathrm{Suffix}(L) = \{v \,:\, \exists_w\, wv \in L\}$,

(c) $\mathrm{Infix}(L) = \{v \,:\, \exists_{s,t}\, svt \in L\}$.

Automat ze stosem nazwiemy deterministycznym, jeśli spełnia dwa warunki:

- Dla każdego stanu $q \in Q$, litery $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ i litery alfabetu stosowego $s \in \Gamma$, istnieje co najwyżej jedno przejście postaci $q \xrightarrow{\mathrm{pop}(s),\ a,\ \mathrm{push}(s_1,s_2,\dots,s_k)} q'$.
- Jeśli dla $q \in Q$, $s \in \Gamma$ istnieje przejście postaci $q \xrightarrow{\mathrm{pop}(s),\ \varepsilon,\ \mathrm{push}(\dots)} q'$, to **nie istnieje** przejście postaci $q \xrightarrow{\mathrm{pop}(s),\ a,\ \mathrm{push}(\dots)} q''$ dla żadnego $a \in \Sigma$.

5. Wykaż, że język $\{a^nb^n \,:\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a^nb^{2n} \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ nie może być rozpoznany przez deterministyczny automat ze stosem.