Języki, automaty i obliczenia — ćwiczenia 7

Gramatyki bezkontekstowe cd.

Wykład:

- Lemat o pompowaniu dla CFL: dla każdego języka bezkontekstowego L istnieje przypisana mu (nieznana, skończona) stała N taka, że:

  każde słowo $w \in L$, $|w| > N$ można rozłożyć na kawałki $w = a \cdot w_1 \cdot b \cdot w_2 \cdot c$, że $|w_1| + |w_2| \geqslant 1$ oraz:
  $$\forall_{k \geqslant 0} \quad a \cdot w_1^k \cdot b \cdot w_2^k \cdot c \in L.$$
  Mamy **niewielki** stopień kontroli nad rozkładem: zawsze istnieje rozkład, w którym $|w_1 \cdot b \cdot w_2| \leqslant N$.
- L bezkontekstowy, K regularny $\Rightarrow L \cap K$ bezkontekstowy.
- Definicja automatu ze stosem *(pushdown automaton)*.
- Równoważność **niedeterministycznych** automatów ze stosem oraz gramatyk bezkontekstowych.

1. *(NR 83, 85, 86, 88, 90 + moje)* Znajdź gramatyki bezkontekstowe dla języków:

(g) $\{a^k b^\ell c^m \ : \ k \neq \ell \vee \ell \neq m\}$,

(h) zbiór słów, które nie są palindromami (powiedzmy, że alfabet to $\{a, b, c\}$),

(i) zbiór słów nad $\{0, 1\}$, które **nie są** postaci ww dla $w \in \{0, 1\}^*$.

(j) zbiór wyrażeń nawiasowych, **przy czym** gramatyka ma być jednoznaczna (każde słowo z języka można wygenerować na dokładnie jeden sposób).

2. *(NR 103+)* Wykaż, że poniższe języki nie są bezkontekstowe:

(a) $\{a^k b^\ell a^k b^\ell \ : \ k, l \in \mathbb{N}\}$,

(b) $\{a^p \ : \ p \text{ jest liczbą pierwszą}\}$,

(c) $\{ww \ : \ w \in \{0, 1\}^*\}$.

3. *(dom?)* Wykaż lemat Ogdena — uogólnienie lematu o pompowaniu: dla każdego języka bezkontekstowego L istnieje przypisana mu (nieznana, skończona) stała N taka, że:

każde słowo $w \in L$ z co najmniej N wyróżnionymi pozycjami można rozłożyć: $w = a \cdot w_1 \cdot b \cdot w_2 \cdot c$ tak, że $w_1 w_2$ ma $\geqslant 1$ zaznaczoną pozycję, $w_1 b w_2$ ma $\leqslant N$ zaznaczonych pozycji oraz:
$$\forall_{k \geqslant 0} \quad a \cdot w_1^k \cdot b \cdot w_2^k \cdot c \in L.$$
(Zauważ, że jeśli zaznaczymy wszystkie pozycje w słowie w, $|w| \geqslant N$, otrzymamy dokładnie tezę lematu o pompowaniu.)

4. *(dom?)* Wykaż, że język $\{a^k b^\ell c^m \ : \ k \neq \ell, \ \ell \neq m, \ m \neq k\}$ nie jest bezkontekstowy.

5. *(NR 125)* Stwórz niedeterministyczny automat ze stosem dla następujących języków:

(a) palindromów,

(b) słów, które zawierają dwukrotnie więcej a niż b,

(c) słów, które nie zawierają dokładnie dwukrotnie więcej a niż b.

Na wykładzie został pokazany szkic równoważności gramatyk bezkontekstowych oraz niedeterministycznych automatów ze stosem. W szkicu zabrakło kilku dowodów, które zebrane są tutaj.

6. Wykaż, że każdą gramatykę bezkontekstową można przepisać do postaci, w której każda produkcja jest jednej z postaci:

$$
\begin{aligned}
&X \to X_1X_2X_3\ldots X_k \qquad (X_1,\ldots,X_k - \text{nieterminale}),\\
&X \to a \qquad (a - \text{terminal}),\\
&X \to \varepsilon.
\end{aligned}
$$

7. *(podobne do NR 128)* Wykaż, że każdy automat niedeterministyczny ze stosem (PDA) jest równoważny pewnemu PDA, który:

- ma tylko jeden stan,
- akceptuje poprzez zdjęcie wszystkich symboli ze stosu.