Języki, automaty i obliczenia — ćwiczenia 6

Gramatyki bezkontekstowe

Uwaga: następne ćwiczenia – **w środę** 8.04.

Wykład: *języki bezkontekstowe (CFL):*

- Definicja przez gramatyki bezkontekstowe (CFG), np. język $\{a^n b^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$:

$$S \to \varepsilon$$
$$S \to aSb$$

  ...z nieterminalem startowym S. Nieterminale: S; terminale: a, b.

  Na przykład: $S \to aSb \to aaSbb \to aaaSbbb \to aaabbb$.

- Inne przykłady CFL: palindromy, wyrażenia nawiasowe, $\{w \in \{a,b\}^* \ : \ \#_a(w) = \#_b(w)\}$.
- Klasa języków regularnych $\subseteq$ klasa języków bezkontekstowych.
- Lemat o pompowaniu dla CFL: dla każdego języka bezkontekstowego L istnieje przypisana mu (nieznana, skończona) stała N taka, że:

  każde słowo $w \in L$, $|w| > N$ można rozłożyć na kawałki $w = a \cdot w_1 \cdot b \cdot w_2 \cdot c$, że $|w_1| + |w_2| \geqslant 1$ oraz:

$$\forall_{k \geqslant 0} \quad a \cdot w_1^k \cdot b \cdot w_2^k \cdot c \in L.$$

  Mamy **niewielki** stopień kontroli nad rozkładem: zawsze istnieje rozkład, w którym $|w_1 \cdot b \cdot w_2| \leqslant N$.

- Przykład języka, który **nie jest** bezkontekstowy: $\{a^n b^n c^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

1. *(NR 83, 85, 86, 88, 90 + moje)* Znajdź gramatyki bezkontekstowe dla języków:

(a) $\{a^k b^\ell c^m \ : \ k + \ell = m\}$,

(b) $\{w \in \{a,b\}^* \ : \ \#_a(w) = \#_b(w)\}$,

(c) $\{w \in \{a,b\}^* \ : \ \#_a(w) = 2 \cdot \#_b(w)\}$,

(d) zbiór formuł logicznych z jedną zmienną x, nad alfabetem $\{x, \text{false}, \text{true}, \wedge, \vee, \neg, (,)\}$,

(e) jak powyżej, ale wyrażenie ma się ewaluować do true dla $x = \text{true}$,

(f) jak powyżej, ale wyrażenie ma się ewaluować do true niezależnie od wartości x,

(g) $\{a^k b^\ell c^m \ : \ k \neq \ell \vee \ell \neq m\}$,

(h) zbiór słów, które nie są palindromami,

(i) zbiór słów nad $\{0,1\}$, które **nie są** postaci ww dla $w \in \{0,1\}^*$.

(j) zbiór wyrażeń nawiasowych, **przy czym** gramatyka ma być jednoznaczna (każde słowo z języka można wygenerować na dokładnie jeden sposób).

2. *(NR 87)* Wykaż, że jeśli języki K oraz L są bezkontekstowe, to bezkontekstowe są również $K \cup L$, KL, L^* oraz L^R.

3. Języki K oraz L są bezkontekstowe. Czy bezkontekstowy jest $K \cap L$?

4. *(NR 103+)* Wykaż, że poniższe języki nie są bezkontekstowe:

(a) $\{a^k b^\ell a^k b^\ell \ : \ k, l \in \mathbb{N}\}$,

(b) $\{a^p \ : \ p$ jest liczbą pierwszą$\}$.

5. Język K jest bezkontekstowy, a L regularny. Czy bezkontekstowy jest $K \cap L$?