Języki, automaty i obliczenia — ćwiczenia 5

Języki regularne – więcej zadań

Wykład: *języki bezkontekstowe; nie przejmujemy się nimi póki co.*

1. *(NR 34+)* Palindrom nazwiemy *nietrywialnym*, gdy ma długość co najmniej 2. Czy poniższe języki nad alfabetem binarnym $\{0, 1\}$ są regularne?

(a) słowa zawierające nietrywialny palindrom jako prefiks;

(b) słowa zawierające nietrywialny palindrom parzystej długości jako prefiks;

(c) słowa zawierające nietrywialny palindrom nieparzystej długości jako prefiks;

(d) słowa zawierające nietrywialny palindrom nieparzystej długości jako infiks.

2. Zbuduj automat syntaktyczny dla języka regularnego $a^*(bc + cb)^*$.

3. Wykażemy twierdzenie Myhilla-Nerodego w inny sposób. Zdefiniujmy (dowolną) kongruencję jako podział A^* (zbioru wszystkich słów nad alfabetem) na klasy taki, że dla każdej klasy $C \subseteq A^*$ zachodzą warunki:

(1) dla każdej litery $a \in A$, istnieje klasa $D \subseteq A^*$ taka, że $Ca \subseteq D$.

(2) $C \subseteq L$ albo $C \cap L = \varnothing$ (C albo w całości siedzi w języku L, albo jest rozłączny).

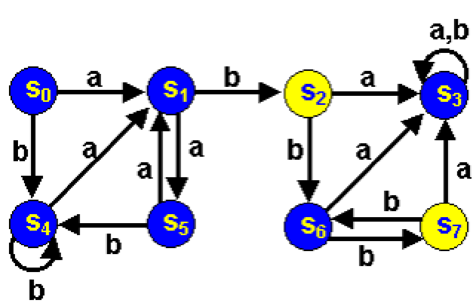
Kroki dowodu:

(a) Wykaż, że istnieje bijekcja pomiędzy kongruencjami języka L o skończenie wielu klasach, a deterministycznymi automatami skończonymi rozpoznającymi L.

(b) Wykaż, że relacja syntaktyczna $\sim_L$ jest „największą” kongruencją pod względem zawierania; to jest, każda inna kongruencja $\sim$ jest zawarta w $\sim_L$.

(c) Wykaż, że L jest regularny $\Leftrightarrow$ relacja $\sim_L$ ma skończenie wiele klas abstrakcji.

4. Zminimalizuj następujący automat (s_0 to stan początkowy, żółte wierzchołki są akceptujące):



Źródło: https://bit.ly/2wgIZfk

5. *(NR 39+) Odległością Hamminga* dwóch słów tej samej długości nazwiemy liczbę pozycji, na których te słowa się różnią. Wykaż, że dla każdego języka regularnego L i stałej naturalnej k, regularny też jest język złożony ze słów, które są w odległości Hamminga:

(a) co najwyżej k od któregokolwiek słowa L,

(b) dokładnie k od któregokolwiek słowa L.

6. *(NR 48)* Trzy zespoły siatkarskie A, B, C rywalizują ze sobą zgodnie z następującą regułą: zwycięzca poprzedniego meczu gra z zespołem, który w tym meczu nie uczestniczył. (Nie ma remisów.) Rozważmy język nad alfabetem $\{A, B, C\}$ oznaczający ciąg zespołów, które wygrywały kolejne mecze. Wykaż, że język jest regularny i znajdź dla niego automat minimalny.

7. *(NR 47)* Dla $n \geqslant 1$, niech NPal_n będzie zbiorem słów nad alfabetem $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, które nie zawierają żadnego nietrywialnego palindromu jako infiks. Ile stanów ma automat minimalny rozpoznający NPal_n?

8. Dany jest automat rozpoznający język L. Sprawdź (algorytmicznie), czy L rozpoznaje jakieś słowo parzystej długości.