

# Języki, automaty i obliczenia — ćwiczenia 2

Automaty skończone (wersja kartki po ćwiczeniach)

## Wykład:

- Automat skończony niedeterministyczny (NFA).
- Automat skończony deterministyczny (DFA).
- Mając automaty  $A_1, A_2$  rozpoznające języki regularne  $L_1, L_2$ , można skonstruować automat rozpoznający  $L_1 \cup L_2$  oraz  $L_1 \cap L_2$ .
- Równoważności konstrukcji:

$$\text{wyrażenie regularne} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{ćwiczenia}} \\ \xleftarrow{\text{wykład 2}} \end{array} \text{NFA} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{(wykład 3)}} \\ \xleftarrow{\text{trywialne}} \end{array} \text{DFA}$$

1. Stwórz automat niedeterministyczny (NFA) oraz deterministyczny (DFA) dla poniższych języków:

- (1) Opisany przez wyrażenie regularne  $(a + b)^*abaab(a + b)^*$ .
- (2) Słowa nad alfabetem  $\{a, b\}$ , w których piąta *od końca* litera to  $b$ .
- (3) Liczby w systemie dziesiętnym podzielne przez 7.

**Definicja 1.** Automat z  $\varepsilon$ -przejściami (*czytaj: epsilon-przejściami*) jest uogólnieniem zwykłego NFA, w którym przejścia mogą być oznaczone znakiem  $\varepsilon$  zamiast literą alfabetu. Automat taki może podczas „wczytywania” słowa w każdym momencie przejść  $\varepsilon$ -przejściem bez wczytywania kolejnej litery słowa.

2. Dane są automaty niedeterministyczne  $A_1, A_2$  rozpoznające języki regularne  $L_1, L_2$ . Skonstruuj automat z  $\varepsilon$ -przejściami rozpoznający język  $L_1L_2 = \{w_1w_2 : w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$  (tj. język złożony z konkatencji słowa z  $L_1$  i słowa z  $L_2$ ).

3. Dany jest automat niedeterministyczny  $A$  rozpoznający język regularny  $L$ . Skonstruuj automat z  $\varepsilon$ -przejściami rozpoznający język  $A^*$  (złożony ze słów, które są konkatencją dowolnej liczby słów z  $A$ ).

4. W tym zadaniu pokażemy konstrukcję NFA z wyrażeń regularnych.

- (1) Wykaż, że każdy automat z  $\varepsilon$ -przejściami jest równoważny pewnemu NFA. (*Wobec tego, automaty te także rozpoznają dokładnie języki regularne.*)
- (2) Wykaż na podstawie powyższych ćwiczeń, że każde wyrażenie regularne ma odpowiadający mu NFA rozpoznający ten sam język.
- (3) Skonstruuj NFA odpowiadające wyrażeniu  $(a^*b + c)^*$ .

5. Dany jest język regularny  $L$  oraz dowolny zbiór  $X \subseteq \Sigma^*$ . Wykaż, że poniższe języki są regularne:

(1)  $X^{-1}L = \{w : \exists x \in X \, xw \in L\}$  (tzw. *left quotient*),

(2)  $LX^{-1} = \{w : \exists x \in X \, wx \in L\}$  (tzw. *right quotient*).

6. Dany jest język regularny  $L$ . Wykaż, że poniższe języki też są regularne:

(1)  $L' = \{w : w \notin L\}$ .

(2)  $L^R$  (odwrócenia wszystkich słów).

(3)  $L_{\min}$  złożony z takich słów  $w$ , które są minimalne leksykograficznie spośród słów długości  $|w|$ .

(4)  $\sqrt{L} = \{w : ww \in L\}$ .

(5)  $\frac{1}{2}L = \{w : \exists u \, |u| = |w|, \, wu \in L\}$ .

(6)  $\text{Sqrt}(L) = \{w : \exists u \, |u| = |w|^2, \, wu \in L\}$ .

#### Dodatkowe zadanie na wszelki wypadek

7. (*nieco trudniejsze*) Dane jest słowo  $w$  długości  $n$ . Skonstruuj automat niedeterministyczny mający  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$  stanów, który rozpoznaje  $w$ , ale nie rozpoznaje żadnego innego słowa długości  $|w|$ .