# Języki, automaty i obliczenia — ćwiczenia 1

Wyrażenia regularne

Przykłady wyrażeń regularnych i języków rozpoznawanych przez nie:

| **Wyrażenie regularne** | **Język** |
|---|---|
| $a$ | $\{a\}$ |
| $a \cdot b \cdot a$ (albo: $aba$) | $\{aba\}$ |
| $a + b + abc$ | $\{a, b, abc\}$ |
| $(a + b)(bc + a)$ | $\{abc, aa, bbc, ba\}$ |
| $a^*$ | $\{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, \dots\}$ |
| $(a + b)^*b$ | $\{b, ab, bb, aab, abb, bab, bbb, \dots\}$ |
| $\varnothing^*$ (albo: $\varepsilon$) | $\{\varepsilon\}$ |

**1.** Jakie języki wyznaczają poniższe wyrażenia regularne?

(1) $(a + b)^*(b + c)^*$

(2) $0 + 1(0 + 1)^*0$

(3) $a^*(ba^*ba^*)^*$

(4) $(00 + 11 + (01 + 10)(00 + 11)^*(01 + 10))^*$

**2.** Jakie wyrażenia regularne opisują poniższe języki?

(1) Wszystkie słowa nad alfabetem $\{a, b\}$ o długości podzielnej przez 3.

(2) Słowa nad alfabetem $\{a, b\}$, w których $b$ występuje tylko na parzystych pozycjach.

(3) Zapisy binarne liczb podzielnych przez 3.

**3.** Wykaż, że *dowolne* dwa języki $L, M$ spełniają $(L^*M^*)^* = (L \cup M)^*$.

**4.** Wykaż, że język opisujący dodawanie pisemne w systemie binarnym jest regularny:

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} \;:\; (a_1a_2 \dots a_n)_2 + (b_1b_2 \dots b_n)_2 = (c_1c_2 \dots, c_n)_2 \right\}$$

**5.** Wykaż, że dla dowolnego zbioru $S \subseteq \{a\}^*$, język $S^*$ jest regularny.

**6.** (a) Zaprojektuj algorytm, który przyjmuje na wejściu: język regularny $L(E)$ opisany przez wyrażenie regularne $E$ oraz słowo $w$ i sprawdza, czy $w \in L(E)$.

(b) Jak usprawnić algorytm, by działał w czasie wielomianowym?

**7.** Wykaż, że istnieją języki nieregularne. (*Wskazówka: ile istnieje języków regularnych?*)

**8.** Zbiór słów $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ nad alfabetem $A$ nazwiemy *kodem*, jeśli każde słowo $w \in A^*$ można sfaktoryzować (zapisać jako konkatenację słów ze zbioru) na *co najwyżej* jeden sposób. Słowa w rozkładzie mogą się powtarzać. Przykładowo, $\{aa, ab, ba\}$ jest kodem, natomiast $\{a, aa\}$ nie jest.

(1) Czy kodem jest $\{a, ab, ba\}$?

(2) Czy kodem jest $\{aa, ba, baa\}$?

(3) Jeśli $S$ nie jest kodem, podaj ograniczenie górne długości najkrótszego słowa, które ma co najmniej dwie faktoryzacje.