

Kognitywistyka: Wstęp do matematyki
Konspekty wykładów.

Wykład 1. (2.10.2017) O pewnym sposobie uzasadniania zdań (matematycznych)

- (a) Obliczyć $1 + 3 + 5 + \dots + 2017$. (Prowadzi do przypuszczenia, że $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$, które uzasadniamy.)
- (b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- (c) Sformułowanie zasad(y) indukcji matematycznej.
- (d) n prostych dzieli płaszczyznę na co najwyżej 2^n części.
- (e) $(1 + a)^n \geq 1 + na$ dla $n = 1, 2, \dots$ i $a > -1$.
- (f) "Dowód" indukcyjny, że wszystkie koty są tego samego koloru.
- (g) Ile razy trzeba łamać tabliczkę czekolady 4×6 , by dostać 24 pojedyncze kostki?

Wykład 2. (9.10.2017) Elementy teorii zbiorów i kombinatoryki.

- (a) Zbiory, elementy zbiorów, notacja, zbiór pusty, przykłady konstrukcji zbiorów.
- (b) Podstawowe operacje na zbiorach ($A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$).
- (c) $\#A \times B = \#A \cdot \#B$, $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.
- (d) Proste własności operacji na zbiorach, np. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ z uzasadnieniami na diagramach Venna.
- (e) Permutacje zbioru A i definicja symbolu $n!$.
- (f) Dowód, że $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.
- (g) Kombinacje. Motywacje: i. 7 prostych na płaszczyźnie (w położeniu ogólnym). Ile jest punktów przecięcia? ii. Z grupy 5 dziewczynek i 4 chłopców wybieramy reprezentację 2 chłopców i 2 dziewczynek. Na ile sposobów możemy to zrobić?
- (h) Definicja symbolu Newtona $\binom{n}{k}$, jako liczby kombinacji.

Wykład 3. (16.10.2017) Kombinatoryka, c.d.

- (a) Funkcja jako przyporządkowanie. Przykłady definiowania funkcji, zbiór wartości funkcji, funkcja różnowartościowa, funkcja "na", funkcja odwrotna do danej.
- (b) Ile jest możliwych tablic rejestracyjnych (np. WA75932)?
- (c) Definicja wariacji z powtórzeniami i dowód, że jest ich n^k .
- (d) Definicja wariacji bez powtórzeń.
- (e) Własności symbolu Newtona: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$,
- (f) Twierdzenie: $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$ z lematem o liczbie wariacji bez powtórzeń.
- (g) Wzór dwumianowy na $(a + b)^n$.
- (h) Kombinacje z powtórzeniami: i. Na ile sposobów można rozdać n paczków k osobom?, ii. Ile jest rozwiązań równania $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ w liczbach całkowitych nieujemnych? Odpowiedź: $\binom{n+k-1}{n}$ z ciekawym dowodem.

Wykład 4. (23.10.2017) Matematyczny model prawdopodobieństwa: i. Probabilistyczny model doświadczenia losowego

- (a) Trochę historii RP, czym się zajmuje RP, motywacje z życia (gry hazardowe, zjawiska masowe, przykład: problem kawalera de'Mere).
- (b) Doświadczenie losowe, jego wyniki, zdarzenia + przykłady.
- (c) Prawdopodobieństwo jako funkcja, która przypisuje zdarzeniom liczby z przedziału $[0, 1]$: przykłady (rzut monetą, rzut dwoma monetami).

Wykład 5. (23.10.2017) Matematyczny model prawdopodobieństwa: i. Aksjomaty rachunku prawdopodobieństwa

- (a) Własności (aksjomaty) rodziny zdarzeń $\mathcal{F}$.
- (b) Własności (aksjomaty) funkcji prawdopodobieństwa $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (c) Model prawdopodobieństwa klasycznego + przykłady (gra w "szóstki" i "dwie szóstki").
- (d) Inne doświadczenia wymagające innego modelu: i. Kij łamiemy "losowo" na 3 części, czy uda się złożyć trójkąt?, ii. Rzucamy monetą do momentu uzyskania 2 orłów.

Wykład 6. (6.11.2017) Prawdopodobieństwo geometryczne.

- (a) Rozwiązanie problemu z kijem i trójkątem, jako motywacja do definicji modelu prawdopodobieństwa geometrycznego.
- (b) Inny model (całkiem rozsądny) jako rozwiązanie tego samego problemu z kijem. (Po pierwszym łamaniu, losujemy, którą część lewą czy prawą, będziemy dalej łamać. To prowadzi do innej odpowiedzi!)
- (c) Paradoks Bertranda z trzema różnymi modelami "maszyny losującej cięciwę" + morał.

Wykład 7. (13.11.2017) Dalsze własności prawdopodobieństwa

- (a) Wzór włączeń i wyłączeń z dowodem. (Korzystamy z $\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \dots \pm \binom{k}{k} = 1$.)
- (b) Sekretarka wkłada 10 tomów do 3 szuflad na chybił trafił.
- (c) Sekretarka wkłada n listów do n kopert na chybił trafił. Szanse, że choć jeden trafił tam, gdzie trzeba.

Prawdopodobieństwo warunkowe:

- (a) Przykłady: i. 2 urny z kulami białymi i czarnymi, i dwa losowania. ii. Suma oczek 4, jakie szanse, że w pierwszym rzucie 2 oczka.
- (b) Definicja $P(A|B)$.
- (c) Funkcja $A \mapsto P(A|B)$ jest prawdopodobieństwem, t.j. spełnia aksjomaty RP.
- (d) Zadanie o spotkaniu raz jeszcze (Wiemy, że Basia nie przyszła za wcześniej.)
- (e) Wzór łańcuchowy + dowód
- (f) Przykład z urnami i kulami.
- (g) Przykład z egzaminatorem Dobrym i Złym (wstęp do wzoru na prawdopodobieństwo całkowite).

Wykład 8. (20.11.2017) Prawdopodobieństwo warunkowe c.d.

- (a) Wzór na prawdopodobieństwo całkowite + dowód.
- (b) Przykład z graniastoslupem (losujemy krawędzie).
- (c) Przykład: urny b razy B, c razy C. Jakie szanse, że druga wyciągnięta kula jest biała?
- (d) Trzy karty: Bankier, Gracz, cel: wskazać Asa pik. "Graczu, odkryję jedną kartę, a ty się zastanów, czy chcesz zmienić swój wybór."
- (e) Wzór Bayesa poprzedzony przykładem z urnami.
- (f) Przykład: fałszywa moneta.
- (g) Paradoks Simpsona: na przykładzie porównania dwóch metod leczenia kamieni nerkowych.
- (h) O testach diagnostycznych: pojęcia swoistości i czułości testu + przykład (prawdopodobieństwo, że pacjent jest faktycznie chory, jeśli test dał "+").

Wykład 9. (27.11.2017) Kolokwium

Wykład 10. (4.12.2017) Niezależność zdarzeń

- (a) Dylemat więźnia (Król postanawia uwolnić jednego z trzech więźniów A , B , C . Więzień A pyta strażnika (ma wiedzę, kto zostanie uwolniony) pyta o więźnia $\neq A$, który zostanie w więzieniu, myśląc że w ten sposób zwiększa swoje szanse uwolnienia do $1/2$.
- (b) Definicja: para zdarzeń A, B jest niezależna, jeśli ... i interpretacja warunku jako $P(A) = P(A|B)$.
- (c) Przykład: wyciągnięcie pika, a wyciągnięcie króla, i podobne.

- (d) Rzut dwukrotny monetą, $A_i = \{ \text{w } i\text{-tym rzucie orzeł} \}$. Założenie o niezależności zdarzeń A, B prowadzi do konkluzji, że $P(A_1 \cap A_2) = 1/4$.
- (e) Przykład: Grupa n osób ustawia się w kolejce. Szanse, że X stoi przed Y , a Y przed Z (symetria!).
- (f) Przykład: Wybieramy rodzinę mającą n dzieci i rozważamy pewne dwa zdarzenia. Okazuje się, że są one niezależne tylko w przypadku $n = 3$.
- (g) Przykład 3 zdarzeń, takich że każda para zdarzeń jest niezależna, ale ewidentnie zdarzenie C zależy od pary A, B .
- (h) Definicja: Trójka zdarzeń niezależna i uogólnienie na n zdarzeń.
- (i) Przykład: n -krotny rzut monetą.

Wykład 11. (11.12.2017) Niezależność zdarzeń, c.d.

- (a) Stwierdzenie. i. A, B niezależne, to A, B^c też, skąd A^c, B^c też. ii. Dla trójki zdarzeń niezależnych mamy podobnie.
- (b) Drobne wnioski typu: A, B, C niezależna, to $A, B \cup C$ też.
- (c) Przykład: i. Jeśli $A_1, \dots, A_{10}$ niezależne, to prawdopodobieństwo, że zajdzie choć jedno z nich wynosi $1 - (1-p)^{10}$. ii. Średnio 1 na 1000 silników jest wadliwy. Prawdopodobieństwo, że wśród 1000 silników ani jeden nie jest wadliwy. Wprowadzenie stałej Eulera $e \approx 2,7182$.
- (d) Schemat Bernoulliego.
- (e) Przykład: turniej 7 meczów, w której lepsza drużyna wygrywa z prawdopodobieństwem 60%, wykres słupkowy prawdopodobieństw w $\text{Bern}(n=7, p=0.6)$.
- (f) Najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego.
- (g) Pojęcie zmiennej losowej, jako funkcji $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
- (h) Przykłady zmiennych losowych oraz wyjaśnienie napisu $P(X = k)$.

Wykład 12. (18.12.2017) Zmienne losowe i ich rozkłady. Wartość oczekiwana.

- (a) Przykład: rozkład zmiennej $Y = X_1 + X_2 = \{ \text{suma oczek w dwóch rzutach kostką} \}$.
- (b) Rozkład dwupunktowy.
- (c) Rozkład $Y = X_1 + X_2 + X_3$ (liczba orłów w 3-krotnym rzucie monetą).

Wartość oczekiwana.

- (a) Przykład. Rzut kostką i różne kary/nagrody. Czy warto grać.
- (b) Definicja $\mathbb{E}X$, w przypadku, gdy zmienna losowa X przyjmuje skończenie wiele wartości.
- (c) Przykład: rzut kostką, $X = \{ \text{liczba oczek} \}$.
- (d) Przykład: Jaka powinna być cena biletu, aby opłacało się grać w pewną prostą grę.
- (e) Przykład: bezpośrednie obliczenie $\mathbb{E}X$ może być całkiem żmudne (prosty przykład wielokrotnego rzutu kostką, $X = \{ \text{suma oczek} \}$.
- (f) Twierdzenie: $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$ z dowodem.
- (g) Rozkład geometryczny z przykładem.
- (h) Twierdzenie: Dla $X \sim \text{Geom}(p)$, $\mathbb{E}X = 1/p$.
- (i) W dowodzie konstruujemy macierz nieskończoną i zliczamy sumy elementów macierzy na dwa sposoby. $1 + 2q + 3q^2 + \dots = 1/(1-q)^2$.
- (j) Przykład: Ile średnio należy rzucać kostką, by wyrzucić "szóstkę".
- (k) Przykład: Z talii wyciągamy 4 karty, a interesuje nas liczba wylosowanych pików. Podajemy rozkład i wartość oczekiwaną rozważanej zmiennej losowej (metoda addytywności $\mathbb{E}$).

Wykład 13. (8.1.2018) Kolokwium.

Wykład 14. (15.1.2018) Wariancja zmiennej losowej.

- (a) Definicja $\text{Var } X = \mathbb{E}(X - m)^2$, $m = \mathbb{E}X$, odchylenie standardowe.

- (b) Przykład: kurs dolara w 2017 i 2018.
- (c) Przykład: wartość papierów wartościowych, pojęcia stopy zwrotu z inwestycji i ryzyka. Wykres *gęstości* rozkładu normalnego i co z tym się robi.
- (d) Proste własności $\mathbb{E}$ i Var , jak np. $\text{Var } X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$, $\text{Var}(a + X) = \text{Var } X$.
- (e) Rzut kostką i wariancja.

Niezależność zmiennych losowych.

- (a) Definicja: zmienne X, Y o rozkładzie skończonym są niezależne, jeśli $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$.
- (b) Przykład: Dwukrotny rzut kostką.
- (c) Przykład: Losujemy 5 kart (ze zwracaniem), $X = \{ \text{liczba wyciągniętych pików} \}$, $Y = \{ \dots \text{ kierów} \}$, $Z = \{ \dots \text{ asów} \}$. Czy X, Y są niezależne? A X, Z ? Co jeśli losowanie jest ze zwracaniem kart?
- (d) Twierdzenie: Dla zmiennych niezależnych X, Y , i. $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$, ii. $\text{Var}(X + Y) = \text{Var } X + \text{Var } Y$. (+dowód)
- (e) Definicja: zmienne $X_1, X_2, \dots, X_n$ są niezależne, jeśli
- (f) Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej o rozkładzie $\text{Bern}(n, p)$: $\mathbb{E}X = np$, $\text{Var } X = npq$.
- (g) Rzucamy 100 razy monetą, $X = \{ \text{liczba orłów} \}$, $Y = \{ \text{liczba orłów w pierwszych 80 rzutach} \}$. Obliczamy $\text{Var}(X + Y) - \text{Var } X - \text{Var } Y$ jako miarę korelacji X i Y .

Wykład 15. (15.1.2018) Błądzenie po prostej.