

Imię i nazwisko:

Nr indeksu:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	SUMA

Za każde zadanie, oprócz pierwszego, można otrzymać 3 punkty. Wszystkie odpowiedzi proszę *starannie* uzasadniać!

Powodzenia!!!

Rozwiązania / Wskazówki

Zadanie 1. (a) (2pkt) Sprawdzić równość

$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1} \quad (*) \quad (T_{m,n})$$

dla $m = 3$ i $n = 5$.

$$\begin{aligned} \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} &\stackrel{?}{=} \binom{6}{4} \\ \text{"} &\quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \\ 1 + 4 + \frac{5 \cdot 4}{2} &= \frac{6 \cdot 5}{2} = 15 \end{aligned}$$

(b) (4pkt) Uzasadnić powyższą równość dla dowolnych liczb naturalnych n, m takich, że $n \geq m$. Wskazówka: przeprowadzić dowód indukcyjny lub zliczyć $(m+1)$ -elementowe podzbiory w zbiorze $(n+1)$ -elementowym, grupując je według elementu największego.

① Uzasadnić (*) dla $n = m$ (TO JEST KRÓTKIE!) |② Wykazać, że z $T_{m,n}$ wynika $T_{m,n+1}$

Rozwiązanie kombinatoryczne: dla $k = m, m+1, \dots, n$, ile jest podzbiorów $A \subseteq \{1, 2, \dots, n+1\}$ t.j. $\#A = m+1$, a największym elementem $k+1$.

Zadanie 2. Na ile różnych sposobów można rozdać 6 jednakowych baloników, 4 jednakowe samochodziki i 3 różne książki trójce dzieci tak, by każde z dzieci otrzymało co najmniej jeden balonik, co najmniej jeden samochodzik i co najmniej jedną książkę.

Proszę uzasadniać odpowiedzi! Proszę wyobrazić sobie, że proszę Teistę wnieść dowód dla kogoś, kto nie zna tematu.

Kombinatoryczne rozwiązanie: $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ w liczbach całkowitych $x_i \geq 0$ równoważne $\binom{n+k-1}{n}$.

Zadanie 3. Niech a_n będzie liczbą ciągów $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ takich, że $\epsilon_i \in \{0, 1\}$ oraz dla dowolnego $1 \leq i \leq n-1$ mamy $\epsilon_i \epsilon_{i+1} \neq 1$, dla $i = 1, 2, \dots, n-1$. Innymi słowy, w ciągu zero-jedynkowym $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ jedynki nie mogą stać obok siebie. Obliczyć a_{11} .

Nie wystarczy napisać $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Należy go uzasadnić!

np. rozróżnić przypadki $\epsilon_{n+1} = 1$ (wówczas musi być $\epsilon_n = 0$)

oraz $\epsilon_{n+1} = 0$ (tutaj wystarczy a_n)

Zadanie 4. Z talii 24 kart (od dziewiątek) wyciągamy 4. Jaka jest szansa, że otrzymamy dokładnie dwa króle i co najmniej jedną kartę koloru czerwonego?

$$\frac{\binom{4}{2} \binom{20}{2} - \binom{2}{2} \binom{10}{2}}{\binom{24}{4}}$$

1 + uzasadnienie

odp: $4P(A_1) - \binom{4}{2}P(A_1 \cap A_2) + \binom{4}{3}P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

Zadanie 5. Losujemy 13 kart z talii 52 kart. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród otrzymanych kart w jednym z kolorów (kier, karo, pik, trefl) będą dokładnie 4 karty? Nie wykluczamy sytuacji, że wśród wylosowanych kart będą 2 lub 3 czwórki kart w tym samym kolorze, np. 4 kiery, 4 piki, 4 trefle i 1 karo.

$\# \Omega = \binom{52}{13}$, zastosujemy wzór szeregów - wyliczeń, $A_1 = \{\text{wśród 13 wylosowanych kart są dokładnie 4 trefle}\}$
 $A_2 - \text{karo}, A_3 - \text{pik}, A_4 - \text{kier}$, $P(A_1) = P(A_2) = \binom{4}{4} \binom{48}{9} / \# \Omega$
 $P(A_1 \cap A_2) = \frac{\binom{4}{4} \binom{48}{4} \binom{44}{9}}{\# \Omega}$, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{\binom{4}{4}^3 \cdot 13}{\# \Omega}$,
 SKAD: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0$

Zadanie 6. Mamy dwie monety: sprawiedliwą (prawdopodobieństwo wylosowania orła wynosi $1/2$) i niesprawiedliwą, dla której prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi $4/5$. Wylosowaliśmy monetę, a następnie wykonaliśmy nią 5 rzutów. Otrzymaliśmy dokładnie 4 orły. Jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucaliśmy monetą niesprawiedliwą?

$A = \{\text{otrzymaliśmy 4 orły}\}$
 $H = \{\text{wylosowaliśmy monetę sprawiedliwą}\}$
 $P(H|A) = ? = \frac{P(A|H) \cdot P(H)}{P(A|H) \cdot P(H) + P(A|H') \cdot P(H')}$
 $P(A|H) = \binom{5}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2}$, $P(H) = P(H') = \frac{1}{2}$,
 $P(A|H') = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \frac{1}{5}$

Zadanie 7. Z urny, w której znajduje się 5 kul białych i 2 czarne, wylosowano bez zwracania 4 kule. Wyznacz

a) wartość oczekiwaną liczby kolorów wśród wylosowanych kul (1, gdy wszystkie 4 kule są tego samego koloru, 2 w przeciwnym wypadku),

$P(X=1) = \frac{\binom{5}{4}}{\binom{7}{4}} = \frac{1}{7} = p$
 $P(X=2) = 1 - p$, więc
 $EX = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 2 = 2 - p = 1 \frac{6}{7}$

b) wartość oczekiwaną liczby czarnych kul wśród wylosowanych. $Y = \{\text{liczba kul czarnych}\}$,

$P(Y=0) = \frac{1}{7}$,
 $P(Y=1) = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{7}{4}} = \frac{4}{7}$
 $\Rightarrow P(Y=2) = \frac{2}{7}$
 $EX = 1 \cdot \frac{4}{7} + 2 \cdot \frac{2}{7} = 1 \frac{1}{7}$

Zadanie 8. Rzucamy 7 razy symetryczną monetą. Niech $A = \{\text{uzyskano więcej orłów niż reszek}\}$, $B = \{\text{wypadły same reszki}\}$, $C = \{\text{wypadły same orły}\}$, $E = \{\text{uzyskano parzystą liczbę orłów}\}$. Czy zdarzenia A , $D = B \cup C$ i E są niezależne? $\leftarrow$ t.j. trójka zdarzeń nie może być niezależna,

Definiujemy!

a nie tylko dwie z par.

Wystarczy zauważyć, że $P(E | D \cap A) = 0 \neq P(E) = \frac{1}{2}$.

$C = \{\text{7 orłów}\}$

odp. NIE

Zadanie 9. Rzucamy kostką do gry, a następnie monetą symetryczną, tyle razy, ile oczek wypadło na kostce. Oblicz prawdopodobieństwo, że dokładnie 3 razy wypadł orzeł.

Ze wzoru na prawd. całkowite: $H_i = \{\text{wypadło } i \text{ orłów}\}$

$P(A) = P(H_3)P(A|H_3) + \dots + P(H_6)P(A|H_6) =$

$= \frac{1}{6} \left(\binom{3}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{4}{3} \frac{1}{2}^4 + \binom{5}{3} \frac{1}{2}^5 + \binom{6}{3} \frac{1}{2}^6 \right) = \dots$