

Imię i nazwisko:

Nr indeksu:

Za każde zadanie można otrzymać 3 punkty. Wszystkie odpowiedzi proszę starannie uzasadniać!
Powodzenia!!!

Uwaga na temat rozwiązań

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	SUMA

Zadanie 1. Rzucamy kostką 3 razy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymamy trzy różne liczby nieparzyste?

Proste, $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^3 \supset A = \{\text{permutacje } 1, 3, 5\}$,

odp $6/6^3 = 1/36$ (wynik + drobne wyjaśnienie) $\Rightarrow 3 \text{ pkt}$

Zadanie 2. Które z poniższych zdań jest prawdziwe w dowolnej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. (Punkty można otrzymać tylko w przypadku trzech poprawnych odpowiedzi.)

(a) Jeśli $A \cup B = \Omega$, to $P(A) + P(B) = 1$.

(b) Jeśli $P(A|B) = P(B|A)$, to $P(A) = P(B)$.

(c) Jeśli $P(A) = P(B)$, to $P(A|B) = P(B|A)$. $\leftarrow$ To problematyczny punkt

Student zapytał, czy nie to prawda, choć $P(A|B)$ nie ma sensu przy $P(B) = 0$. Drobne wyjaśnienie i stwierdzenie

3 pkt, nawet jeśli nie (c) mieć odp. na "Tak",

Zadanie 3. Niech a_n będzie liczbą ciągów $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ takich, że $\epsilon_i \in \{0, 1\}$ oraz dla dowolnego $1 \leq i \leq n-1$ mamy $\epsilon_i \epsilon_{i+1} \neq 1$, dla $i = 1, 2, \dots, n-1$. Innymi słowy, w ciągu zero-jedynkowym $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ jedynki nie mogą stać obok siebie. Obliczyć a_{10} .

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (byłoby nie wydawało się, ale już nie pamiętałem)

$a_2 = 3$

Zadanie 4. Rzucamy kostką 3 razy. Definiujemy zdarzenia: $A_i = \{\text{wypadło w sumie oczek}\}$, dla $i = 3, 4, \dots, 18$ oraz zdarzenie $B = \{\text{w każdym rzucie wypadła inna liczba oczek}\}$. Zaproponować przestrzeń Ω wyników tego doświadczenia. Obliczyć $P(A_{14} \cap B)$ oraz wykazać, że $P(A_{14}) = P(A_7)$.

Zc $P(A_{14} \cap B) = P(\{3, 5, 6\} + \text{permutacje}) = 6/216$ łatwo 1 pkt

$\#A_{14} = \#A_7 = 15$ (mało pomyślałem na palcach) $\Rightarrow 3 \text{ pkt}$

Zadanie 5. Z talii 24 kart (od dziewiątek) wyciągamy 4. Jakie są szanse, że otrzymamy dokładnie dwa króle i co najmniej jedną kartę koloru czerwonego?

Odp: $\binom{24}{4}^{-1} \left(\underbrace{\binom{4}{2} \binom{20}{2}}_{\text{dłt. 2 króle}} - \underbrace{\binom{2}{2} \binom{10}{2}}_{\text{2 króle czerwone}} \right)$

Mnożąc nieco dłużej,

$\binom{24}{4}^{-1} \cdot \left(\binom{2}{2} \binom{20}{2} + \binom{2}{4} \binom{2}{1} \binom{20}{2} + \underbrace{\binom{2}{2} \binom{10}{2}}_{\text{król}} + \binom{2}{2} \binom{10}{1} \binom{12}{1} \right) ?$

Zadanie 6. W grze komputerowej odcinki długości 1 opadają w sposób losowy na odcinek długości 3 (W efekcie odcinek długości 1 w całości leży na odcinku długości 3.) Zaproponować model tego doświadczenia i obliczyć prawdopodobieństwo, że dwa kolejne odcinki długości 1, po opadnięciu, będą rozłączne.

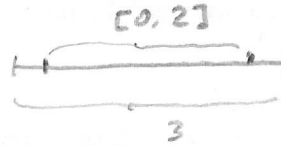
x, y położenie środków odcinków

$$x, y \in [0, 2], \Omega = [0, 2]^2$$

$$A = \{|x-y| > 1\}$$



$$P(A) = 1/4$$



Z warunków

dyktuje:

$$x \in k \cdot 0,5, \\ k = 1, 2, 3, 4, 5$$

dotyczy 2 pkt

Zadanie 7. Losujemy 13 kart z talii 52 kart. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród otrzymanych kart dokładnie będzie sześć kart tego samego koloru (pik, kier, karo, trefl)? (Nie wykluczamy układu 6-6-1-0.)

Ze wzoru Stewarta - wyliczenie:

$$P = 4 \cdot P(\text{dokł. 6 pików}) - \binom{4}{2} P(\text{dokł. 6 pików, 6 kierów}) + 0 \\ = \binom{52}{13}^{-1} \cdot (4 \cdot \binom{13}{6} \binom{39}{7}) - 6 \cdot \binom{13}{6}^2 \cdot \binom{26}{1}$$

Zadanie 8. Na ile różnych sposobów można rozdać 7 jednakowych baloników, 5 jednakowych samochodzików i 4 różne książki trójce dzieci tak, by każde z dzieci otrzymało przynajmniej jeden balonik, przynajmniej jeden samochodzik i co najmniej jedną książkę.

$$\text{balony: } \# \{x_1 + x_2 + x_3 = 7, x_i \geq 1\} = \binom{4+3-1}{2} = \binom{6}{2} \quad (\text{można przełożyć na polece})$$

$$\text{samochodzik: analogicznie } \binom{4}{2}$$

$$\text{książki: } \# \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_i \in \{1, 2, 3\}\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = 3^4 - 2^4 \cdot 3 + 3 = 36$$

$$\text{Razem } \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 36$$

Zadanie 9. Rzucamy kostką sześcienną, a następnie tyle razy monetą, ile wyrzuciliśmy oczek na kostce. Oblicz prawdopodobieństwo, że nie wyrzucimy reszki.

$$\text{Jasne! prawd. całkowite } \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{64} \right) = \frac{21}{128}$$

Zadanie 10. Rzucamy kostką sześcienną, a następnie tyle razy monetą, ile wyrzuciliśmy oczek na kostce. Okazało się, że nie wyrzuciliśmy reszki. Jakie są szanse, że na kostce wypadła jedynka?

$$\text{prosty Bayes: } \frac{32}{63}$$