

Imię i nazwisko:

Nr indeksu:

1	2	3	4	5	6	7	8	SUMA

Zadania (8 · 3 = 24 punkty)

Za każde zadanie można otrzymać 3 punkty. Wszystkie odpowiedzi proszę starannie uzasadniać! Odpowiedzi liczbowe prosimy podawać w postaci ułamka nieskracalnego, na przykład $2/3$, a nie $24/36$. Powodzenia!!!

Zadanie 1. W pudełku znajduje się 9 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 9. Losujemy trzy kule ze zwracaniem, a numery wylosowanych kul stworzą nam liczbę trzycyfrową. Obliczyć prawdopodobieństwo, że uzyskana w ten sposób liczba dzieli się

(a) (1 punkt) 2,

(b) (2 punkty) 2 lub 3.

(a) Wytenny rozkład ortogonalny (dla czego?). Odp: $4/9$ (b) $\Omega = \{(a, b, c) : a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}\}$, $\#\Omega = 9^3$.

$$A = A_2 \cup A_3, \quad A_i = \{(a, b, c) \in \Omega : c \text{ parytety}\} \quad (i=2,3)$$

$$A_2 = \{(a, b, c) \in \Omega : c \text{ parytety}\}$$

$$A_3 = \{(a, b, c) \in \Omega : 3 \text{ dzieli } a+b+c\}$$

$$P(A) = P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 \cap A_3)$$

$$(a) \quad \frac{4}{9} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{9}$$

→ rozważę przypadki:

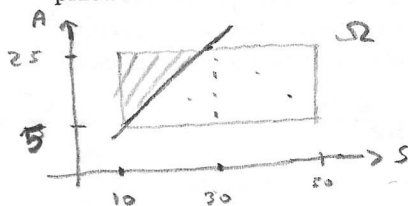
$$a+b+c \text{ daje resztę } 0, 1, 2 \text{ z dzielenia przez } 3$$

Zadanie 2. Używając spółgłosek 7 (b, c, d, f, g, h, s) i 5 samogłosek (a, e, i, o, u). Ile można utworzyć słów 7-literowych, z których każde zawiera 4 spółgłoski i 3 samogłoski? Przykład: możemy ułożyć słowo aaubdgi i słowo bifidus.

$$\text{Odp: } \binom{7}{4} \cdot 7^4 \cdot 5^3 \quad (\text{przez mnożenie!})$$

||
?

Zadanie 3. Agata targuje się ze sprzedawcą na bazarze. Sprzedawca wyznaczył cenę towaru na losową wartość w przedziale 10 - 50 zł, w tajemnicy przed Agatą. Sprzedawca sprzedaje towar wtedy, kiedy cena zaproponowana przez Agatę będzie o co najwyżej 5 zł niższa, niż jego wyznaczona cena. Agata losuje swoją propozycję z przedziału 5 - 25 zł. Jakie jest prawdopodobieństwo, że uda im się dobić targu?



$$\{S - A < 5\}$$

$$\text{Odp: } P = 1/4$$

Zadanie 4. Dwóch tenisistów (słabszy i silniejszy) rozgrywają między sobą turniej ping-ponga. Grają do momentu wygrania meczu przez słabszego z zawodników. Mecz gra się do 3 wygranych setów, prawdopodobieństwo wygrania pojedynczego seta przez gracza słabszego wynosi $1/3$. Oblicz

(a) prawdopodobieństwo, że pierwszy mecz zakończy się zwycięstwem 3:2 słabszego zawodnika,

(b) wartość oczekiwaną liczby rozegranych meczów.

$$(a) \quad \left. \begin{array}{l} S S L L S \\ \vdots \\ S L S S S \end{array} \right\} \rightarrow P^3 q^2 \quad (P = 1/3, q = 2/3)$$

$$P(3:2) = \binom{4}{2} P^3 q^2$$

$$(b) \quad a = P(\text{wygra } S) = P(3:2) + P(3:1) + P(3:0)$$

$$= \binom{4}{2} P^3 q^2 + \binom{3}{1} P^3 q + P^3$$

S = słabszy, L = lepszy

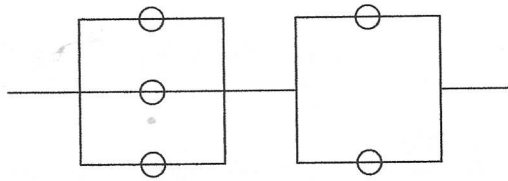
$$\text{Odp: } a = 17/81, \text{ więc } E = \frac{81}{17}$$

(podać: wartość oczekiwaną)

$$(1*) \quad P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{27}$$

$$\text{Odp: } P(A) = \frac{17}{27}$$

Zadanie 5. Oblicz prawdopodobieństwo przekazania sygnału przez układ pokazany na rysunku, składający się z pięciu przekazywaczy działających niezależnie od siebie, jeśli prawdopodobieństwa przekazania sygnału przez każdy z przekazywaczy wynosi p , $0 < p < 1$.



odp.

$$(1 - (1-p)^3) (1 - (1-p)^2)$$

Zadanie 6. Częstka (rodzic) może się podzielić na 0, 1 lub dwie częstki (dzieci) z prawdopodobieństwami równymi $1/4, 1/2, 1/4$, odpowiednio. Po podziale, częstka rodzic znika. Niech X_i , $i = 0, 1, 2, \dots$ oznacza liczbę częstek i -tej generacji, $X_0 = 1$. Oblicz

(a) $P(X_2 > 0)$,

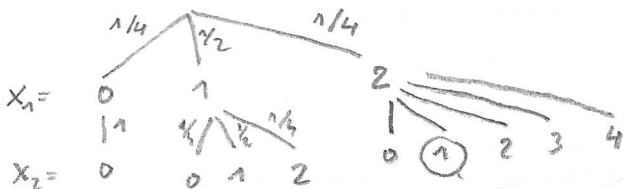
(b) prawdopodobieństwo, że $X_1 = 2$, jeśli wiadomo, że $X_2 = 1$.

$$(a) P(X_2 = 0) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= \frac{25}{64}$$

$$P(X_1 = 2 | X_2 = 1) = \frac{P(X_2 = 1 | X_1 = 2) \cdot P(X_1 = 2)}{P(X_2 = 1)}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{5}$$



Zadanie 7. W teście jednokrotnego wyboru są dwa zadania. W pierwszym student ma 3 odpowiedzi do wyboru, w drugim - pięć. Student, w każdym z zadań w sposób losowy zakreśla po jednej odpowiedzi. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję liczby prawidłowo rozwiązanych zadań.

$$X = X_1 + X_2, \quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{(kierne pytanie z i-tego zadania)} \\ 0 & \end{cases}$$

$$P(X_1 = 1) = \frac{1}{3}, \quad P(X_2 = 1) = \frac{1}{5}, \quad E X = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$$

$$Var X = Var X_1 + Var X_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}$$

Zadanie 8. $2n$ zawodników, z czego n w koszulkach niebieskich i n w czerwonych, stanęło na przeciwko sobie w sposób całkowicie losowy. Znajdź wartość oczekiwaną zmiennej losowej $X = \{ \text{liczba osób mających na przeciwko siebie osobę o tym samym kolorze koszulki} \}$. Dla $n = 2$ proszę podać rozkład zmiennej losowej X .

$$E X = E X_1 + \dots + E X_{2n}$$

$$P(X_i = 1) = \frac{n-1}{2n-1} \text{ (dla } i=1 \text{)}$$

$X_i = \begin{cases} 1 & \text{jeśli nie przeciwko i-tego zawodnika jest osoba o tej samej kolorze koszulki} \\ 0 & \end{cases}$

$$E X = 2n \cdot \frac{n-1}{2n-1} \text{ odp.}$$

$$n=2: \quad P(X=4) = \frac{1}{3}, \quad P(X=0) = \frac{2}{3}$$

Przykładowe ustawienie: (C_1, N_1) oraz (N_2, C_2) naprzeciw siebie. $4! = 24$

Uwaga. Wartość oczekiwana zmiennej o rozkładzie geometrycznym z parametrem p (prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie) wynosi $1/p$. (do Zadania 4)

tutaj $X=0$.

Można pomyśleć, że zawsze C_1 jest

2 u lewej gdybyśmy mieli $n=6$

Dwie konfiguracje dają $X=4$:

$$\frac{C_1}{C_2} \frac{N_1}{N_2} \text{ oraz } \frac{C_1}{C_2} \frac{N_2}{N_1}$$

Pozostałe ustawienia dają $X=0$.

Imię i nazwisko:

Nr indeksu:

teoria	1	2	3	test	1	2	3	4	5	6	SUMA

Zadania teoretyczne ($3 \cdot 4 = 12$ punktów)

Zadanie 1. [A] Proszę uzasadnić, że liczba podzbiorów zbioru n -elementowego wynosi 2^n . Wskazówka: wykonać najpierw zadanie dla $n = 3$ (1 punkt).

$n = 3$, $\Omega = \{1, 2, 3\}$, Podzbiory: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}$
(wgl jest ich $8 = 2^3$)

Ogólnie: Każdy podzbiór A zbioru $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ kodujemy jako wsg $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$, przy czym $\epsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } i \in A \\ 0 & \text{wps} \end{cases}$ Np: wsg $(0, 1, 0)$

Wzrost: każdy podzbiór Ω = krotk wsg $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$
 $= 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n$

horepandje z podzbiorem
 $\{1, 3\}$ ($n = 3$)

Zadanie 2. [A] Na podstawie aksjomatów:

(A1) $P(A) \geq 0$ dla dowolnego zdarzenia A ;

(A2) $P(\Omega) = 1$;

(A3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, dla dowolnych zdarzeń A, B takich, że $A \cap B = \emptyset$,

wynioskować, że $P(A) \leq P(B)$ dla dowolnych zdarzeń A, B takich, że $A \subset B$.

$$B = A \cup (B \setminus A) \quad \text{z (A3)} \quad P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \quad \text{z (A1)}$$

$$\text{wzrost} \quad \text{wzrost} \quad \text{wzrost} \quad \text{wzrost}$$

$$P(B) \geq P(A)$$

Zadanie 3. (Trzy karty) Na stole leżą obok siebie 3 karty, odwrócone koszulkami do góry, as pik, as karo i as kier. Naszym zadaniem jest wskazanie asa pik. Wskazujemy jedną z kart i w tym momencie słyszymy od prowadzącego grę: "Graczu, odkryję jedną z kart, a Ty się zastanów, czy nie chcesz zmienić swojego wyboru", po czym odkrywa jedną z kart czerwonych. Czy powinniśmy zmienić swój wybór? Prowadzący wie, która karta jest którą, a w przypadku, gdy Gracz wskaże asa pik, prowadzący odkrywa każdą z kart czerwonych z jednakowym prawdopodobieństwem $1/2$. Odpowiedź proszę szczegółowo uzasadnić. Jakie mamy szanse zwycięstwa w tej grze, $1/3$, $1/2$, a może inna liczba?

Możliwe układy kart

1° A pik, A karo, A kier

2° A pik, kier, karo

3° kier, pik, karo

4° karo, pik, kier

5° kier, karo, pik

6° karo, kier, pik

Przypuścimy, że gracz wskazuje karta
swobodnie.

⊕ Nie zmieniać wyboru $\Rightarrow$ nie ma

zwycięstwa = $2/6$ (przypadki 3°, 4°)

1

⊖ Zmiana wyboru

W przypadkach 1°, 2°, 5°, 6° prowadzący

grę odkrywa karta, o my wygrujemy

szansa zwycięstwa = $4/6$!

Warto zmienić wybór !

Część testowa (7 · 2 = 14 punktów)

Proszę wpisać tylko odpowiedzi: tak lub nie. Poprawna odpowiedź na wszystkie podpunkty daje 2 punkty za zadanie, błąd choć w jednym z podpunktów oznacza punkt ujemny. Za poprawną odpowiedź na dwa pytania z trzech i nie udzieleniu odpowiedzi na trzecie, można uzyskać 1 punkt. W każdym pytaniu może być dowolna liczba zdań prawdziwych – także 0. Uwaga: wartość oczekiwana liczby zdobytych punktów z testu przy losowym wpisywaniu odpowiedzi jest ujemna i wynosi $-4\frac{3}{8}$.

Zadanie 1. Która z równości jest poprawna:

- ☒ (a) $\sum_{k=1}^4 k = 10$, $1+2+3+4 = 10$
☒ (b) $\sum_{k=1}^n k = n(n+1)/2$, dla dowolnej liczby naturalnej n , (suma ciągu arytmetycznego)
☒ (c) $\sum_{k=2}^n k = n(n-1)/2$, dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$. (np. $n=3$)

Zadanie 2. Wiadomo, że przynajmniej jedno ze zdarzeń A i B musi zajść, a ponadto $P(A) = 2/3$, $P(B) = 5/6$. Wówczas

- ☒ (a) $P(A|B) < 1/2$,
☒ (b) $P(A|B) = 3/5$,
☒ (c) $P(B|A) = 3/4$.
- $A \cup B = \Omega$, więc $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 1 = 1/2$,
 skąd $P(A|B) = \frac{1/2}{5/6} = 3/5$; $P(B|A) = \frac{1/2}{2/3} = 3/4$

Zadanie 3. Niech X, Y, Z będą zmiennymi losowymi o skończonym rozkładzie. Które ze wzorów są zawsze prawdziwe

- ☒ (a) $E(X + Y + Z) = EX + EY + EZ$,
☒ (b) $\text{Var}(X + Y + Z) = \text{Var } X + \text{Var } Y + \text{Var } Z$, jeśli zmienne X, Y, Z są niezależne.
☒ (c) $\text{Var}(2X + 3) = 3 + 4 \text{Var } X$. $\text{Var}(a + X) = \text{Var } X$

Zadanie 4. Zdarzenia $A_1, \dots, A_{10}$ są niezależne i mają jednakowe prawdopodobieństwo p . Jakie jest prawdopodobieństwo, że zajdzie dokładnie jedno z nich:

- ☒ (a) $p(1-p)^9$,
☒ (b) $10p(1-p)^9$,
☒ (c) $1 - (1-p)^{10}$.

Zadanie 5. Następujące zdania dotyczą podzbiorów pewnego ustalonego zbioru Ω . Wskaż, które z poniższych zdań są prawdziwe.

- ☒ (a) $A' \cup B' = A \cap B$,
☒ (b) $A \cap (\emptyset \cup B) = A$, jeśli tylko $A \subset B$,
☒ (c) $(A \cap \emptyset) \cup B = B$.

Zadanie 6. Które ze wzorów są prawdziwe:

- ☒ (a) $\binom{6}{3} = 30$,
☒ (b) $\binom{20}{6} + \binom{20}{7} = \binom{21}{6}$,
☒ (c) $\binom{2018}{18} - \binom{2018}{2000} = 1$.

Zadanie 7. Który z poniższych wzorów jest poprawny:

- ☒ (a) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$,
☒ (b) $P(A \cap B \cap C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cup B) + P(B \cup C) + P(A \cup C) + P(A \cup B \cup C)$,
☒ (c) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$.