

Imię i nazwisko:

Nr indeksu:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	SUMA

Za każde zadanie, oprócz pierwszego, można otrzymać 3 punkty. Wszystkie odpowiedzi proszę *starannie* uzasadniać!

Powodzenia!!!

Zadanie 1. (a) (2pkt) Sprawdzić równość

$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

dla $m = 3$ i $n = 5$.

(b) (4pkt) Uzasadnić powyższą równość dla dowolnych liczb naturalnych n, m takich, że $n \geq m$. Wskazówka: przeprowadzić dowód indukcyjny lub zliczyć $(m+1)$ -elementowe podzbiory w zbiorze $(n+1)$ -elementowym, grupując je według elementu największego.

Zadanie 2. Na ile różnych sposobów można rozdać 6 jednakowych baloników, 4 jednakowe samochodziki i 3 różne książki trójce dzieci tak, by każde z dzieci otrzymało co najmniej jeden balonik, co najmniej jeden samochodzik i co najmniej jedną książkę.

Zadanie 3. Niech a_n będzie liczbą ciągów $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ takich, że $\epsilon_i \in \{0, 1\}$ oraz dla dowolnego $1 \leq i \leq n-1$ mamy $\epsilon_i \epsilon_{i+1} \neq 1$, dla $i = 1, 2, \dots, n-1$. Innymi słowy, w ciągu zero-jedynkowym $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ jedynki nie mogą stać obok siebie. Obliczyć a_{11} .

Zadanie 4. Z talii 24 kart (od dziewiątek) wyciągamy 4. Jaka jest szansa, że otrzymamy dokładnie dwa króle i co najmniej jedną kartę koloru czerwonego?

- Zadanie 5. Losujemy 13 kart z talii 52 kart. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród otrzymanych kart w jednym z kolorów (kier, karo, pik, trefl) będą dokładnie 4 karty? Nie wykluczamy sytuacji, że wśród wylosowanych kart będą 2 lub 3 czwórki kart w tym samym kolorze, np. 4 kiery, 4 piki, 4 trefle i 1 karo.
- Zadanie 6. Mamy dwie monety: sprawiedliwą (prawdopodobieństwo wylosowania orła wynosi $1/2$) i niesprawiedliwą, dla której prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi $4/5$. Wylosowaliśmy monetę, a następnie wykonaliśmy nią 5 rzutów. Otrzymaliśmy dokładnie 4 orły. Jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucaliśmy monetą niesprawiedliwą?
- Zadanie 7. Z urny, w której znajduje się 5 kul białych i 2 czarne, wylosowano bez zwracania 4 kule. Wyznacz
- a) wartość oczekiwaną liczby kolorów wśród wylosowanych kul (1, gdy wszystkie 4 kule są tego samego koloru, 2 w przeciwnym wypadku),
 - b) wartość oczekiwaną liczby czarnych kul wśród wylosowanych.
- Zadanie 8. Rzucamy 7 razy symetryczną monetą. Niech $A = \{ \text{uzyskano więcej orłów niż reszek} \}$, $B = \{ \text{wypadły same reszki} \}$, $C = \{ \text{wypadły same orły} \}$, $E = \{ \text{uzyskano parzystą liczbę orłów} \}$. Czy zdarzenia A , $D = B \cup C$ i E są niezależne?
- Zadanie 9. Rzucamy kostką do gry, a następnie monetą symetryczną, tyle razy, ile oczek wypadło na kostce. Oblicz prawdopodobieństwo, że dokładnie 3 razy wypadł orzeł.