

Kognitywistyka: Wstęp do matematyki
Niezależność zmiennych losowych, wariancja, dystrybuanta zmiennej losowej
15.1.2018

- Zadanie 1. Losujemy bez zwracania dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3\}$. Niech X oznacza iloraz pierwszej wylosowanej liczby przez drugą. Obliczyć wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennej losowej X .
- Zadanie 2. Rzucamy monetą do momentu wyrzucenia orła lub 3 reszek z rzędu. Znajdź rozkład zmiennej losowej $X = \{\text{liczba wykonanych rzutów}\}$ i obliczyć $\mathbb{E}X$, $\text{Var } X$.
- Zadanie 3. Rzucamy kością sześcienną sześć razy. Niech X oznacza najmniejszą z uzyskanych wartości. Wyznacz rozkład X , wartość średnią $\mathbb{E}X$ i wariancję $\text{Var } X$.
- Zadanie 4. Rzucamy 2 razy monetą. Niech $X_i = \{\text{liczba orłów w } i\text{-tym rzucie}\}$ dla $i = 1, 2$ ($X_i \in \{0, 1\}$), niech $Y = X_1 + X_2$, jeśli $X_1 + X_2 \leq 1$ oraz $Y = 0$, jeśli $X_1 + X_2 = 2$. Czy zmienne losowe X_1, Y są niezależne? Czy trójka zmiennych losowych X_1, X_2, Y jest niezależna?
- Zadanie 5. Rzucamy kostką dwunastościenną 12 razy. Oblicz wariancję zmiennej losowej $X = \{\text{liczba rzutów z wynikiem większym niż } 8\}$.
- Zadanie 6. Rzucamy kością sześcienną tak długo, aż nie wypadną wszystkie wartości. Oblicz wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów.
- Zadanie 7. Rzucamy monetą tak długo, aż nie pojawią się dwa orły lub dwie reszki z rzędu. Niech X oznacza liczbę wykonanych rzutów. Wyznacz rozkład zmiennej X , jej wartość oczekiwaną i wariancję. Wskazówka: dla zmiennej losowej X o rozkładzie geometrycznym z parametrem p ($X \sim \text{Geom}(p)$) mamy $\mathbb{E}X = 1/p$, $\text{Var} = q/p^2$.
- Zadanie 8. Z liczb $1, 2, \dots, 100$ losujemy jedną. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję pola prostokąta o wymiarach $a/100$ na $1 - a/100$. (Wskazówka: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$).