

7.9.2021, kl 1b

Wyrażenia algebraiczne

Zadanie 1. Znajdź geometryczne uzasadnienie wzoru $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Rozpatrz kwadratu o boku $a + b$.

Zadanie 2. W podobny sposób znajdź uzasadnienie wzorów

- (a) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
- (b) $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$,
- (c) $(a + b + c)^2 = \dots$,
- (d) $1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n + 1)/2$.

Zadanie 3. Oblicz iloczyny $18 \cdot 22$, $53 \cdot 47$, 0.98^3 , $496 \cdot 504$, $7778^2 - 2223^2$. Zastosuj wzory „skróconego mnożenia”.

Zadanie 4. Zamień poniższe iloczyny na sumy

- (a) $(1 - x + x^2)(2 + x^2)$,
- (b) $(1 + x + x^2)(x - x^2 + x^3)$,
- (c) $(a - b)^3$,
- (d) $(a + 2b)^4$,
- (e) $(a - b + 2c)(a + 3b + 2c)$,
- (f) $(ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2)$,
- (g) $(a + b + c + d)(a - b + c - d)$,
- (h) $(x - 2y + 3z)(y - 2z + 3x)(z - 2x + 3y)$.

Zadanie 5. (a) Rozłóż na iloczyn $2x^2 + 3xy + y^2$.

(b) Zaznacz na płaszczyźnie te punkty (x, y) , dla których

$$2x^2 + 3xy + y^2 < 0.$$

Zadanie 6. Zamień sumy na iloczyny wyrażen algebraicznych

- | | |
|---|-------------------------------------|
| (a) $x^2 - 2x - 3$, | (f) $a^2 - b^2 + 2b - 1$, |
| (b) $4x^2 - 2x - \frac{3}{4}$, | (g) $a^2 + b^2 + 2ab + 2bc + 2ca$, |
| (c) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x - 8$, | (h) $abc + ab + bc + ca + a +$ |
| (d) $ab + bc + ca + b^2$, | $b + c + 1$. |
| (e) $2ab - a - 4b + 2$, | |

Zadanie 7. Rozłóż na iloczyn

$$a^2c - ac^2 + c^2b - b^2c + b^2a - a^2b.$$

Zadanie 8. O liczbach a, b, c wiadomo, że $a + b + c = 0$ i $ab + bc + ca = 0$. Uzasadnij, że $a = b = c = 0$.

Zadanie 9. Każda z liczb całkowitych a, b jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych. Wykaż, że $a \cdot b$ też jest tej postaci.

Zadanie 10. Uzasadnij, że wyrażenia $a^2 + b^2$ nie da się zapisać w postaci $(pa + qb)(ra + sb)$, gdzie p, q, r, s są pewnymi stałymi (nie zależą od a, b).

Zadanie 11. Dla jakich liczb x, y zachodzi $(x + y)^3 = x^3 + y^3$?

Zadanie 12. Znajdź wszystkie liczby pierwsze postaci $8^n \pm 1$, gdzie n jest liczbą naturalną.

Zadanie 13. Wyznacz wszystkie pary liczb x, y spełniające dane równania:

- (a) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$,
- (b) $2x^2 + y^2 + 4 = 2xy + 4x$,
- (c) $x^2 + xy = 2x + 2y$,
- (d) $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 4x + 4y + 4 = 0$.

Zadanie 14*. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2 - 4y + 7 = 0, \\ y^2 - 6z + 14 = 0, \\ z^2 - 2x - 7 = 0. \end{cases}$$