

2.9.2021, kl 1b

Zadania różne

Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Zadanie 1. Oblicz sumę kolejnych liczb naturalnych od 1 do 2021.

Zadanie 2. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n ułamek

$$\frac{15n+4}{10n+3}$$

jest nieskracalny.

Zadanie 3. Suma 19 różnych liczb naturalnych wynosi 191. Znajdź te liczby.

Zadanie 4. Liczbę naturalną n zapisano w systemie liczbowym o podstawie a jako 111. Udowodnij, że n nie jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 5. Dwie dodatnie liczby całkowite są takie, że $a - b = \frac{a}{b}$. Która z liczb jest większa ab czy $a + b$?

Zadanie 6. Niech $n \in \mathbb{N}$. Która z liczb jest większa: $\sqrt{n} + \sqrt{n+2}$ czy $2\sqrt{n+1}$?

Zadanie 7. Liczby a, b są naturalne. Która z liczb jest większa, $a^a \cdot b^b$ czy $a^b \cdot b^a$?

Zadanie 8. Znajdź iloczyn wszystkich dzielników liczby 10^6 .

Zadanie 9. Uzasadnij, że

$$\frac{9}{100} < \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{10}.$$

Zadanie 10. Wykaż, że suma odwrotności kolejnych liczb naturalnych od 1 do 4096 jest większa niż 7.

Zadanie 11. Jaś twierdzi, że do każdej liczby dwucyfrowej można dopisać dwie cyfry z prawej i otrzymać kwadrat liczby całkowitej. Na przykład jeśli do 10 dopiszemy 24, to dostaniemy $1024 = 32^2$. Czy Jaś ma rację?

Zadanie 12. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ istnieją liczby naturalne k i l takie, że $k < l$ oraz

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots + \frac{1}{(l-2)(l-1)} + \frac{1}{(l-1)l}.$$

Zadanie 13. Czy istnieje liczba całkowita n , której wszystkie cyfry są większe od 5, a jednocześnie wszystkie cyfry liczby n^2 są mniejsze niż 5?