Zadanie 6.5

Zaczniemy od podpunktu a. Chcemy sprawdzić, czy istnieje macierz A, która przeprowadza wektory

$$\begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \\ \| & \| & \| \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} \end{array}$$

na wektory

$$\begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ \| & \| & \| \\ \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Taka macierz musiałaby spełniać warunki $Av_i = u_i$ dla $i \in \{1, 2, 3\}$. Zaczniemy od sprawdzenia, czy wektory v_i są zależne liniowo. W tym celu wpisujemy je jako wiersze do macierzy i schodkujemy ją.

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & -5 \end{bmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} \end{array}$$

← tym razem przez cały proces schodkowania chcemy używać początkowych oznaczeń wierszy, aby wiedzieć jakie kombinacje początkowych wierszy mamy na każdym kroku

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 - 2v_1 \\ v_3 + v_1 \end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 - 2v_1 \\ v_3 + v_1 + 2(v_2 - 2v_1) \end{matrix} \end{array}$$

Dostaliśmy wiersz zerowy, czyli wektory nie są liniowo niezależne. Jeden z nich jest kombinacją pozostałych. Co więcej, dzięki temu, że dokładnie opisywaliśmy operacje na macierzy, możemy sprawdzić, jaka to jest kombinacja. Mamy:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= v_3 + v_1 + 2(v_2 - 2v_1) \\ &= v_3 + v_1 + 2v_2 - 4v_1 \\ &= v_3 - 3v_1 + 2v_2, \end{aligned}$$

zatem

$$v_3 = 3v_1 - 2v_2. \qquad (*)$$

Skoro macierz A miała przeprowadzać v_i na u_i, to:

$$A v_1 = u_1, \qquad (1)$$

$$A v_2 = u_2, \qquad (2)$$

$$A v_3 = u_3. \qquad (3)$$

Łącząc to z wcześniejszą obserwacją, dostajemy:

$$u_3 \overset{(3)}{=} A v_3 \overset{(*)}{=} A(3v_1 - 2v_2) = 3Av_1 - 2Av_2 \overset{(1)\,i\,(2)}{=} 3u_1 - 2u_2$$

Stąd, jeśli taka macierz A istnieje, to wektory u_i muszą spełniać powyższy warunek.

Sprawdzamy, czy to zachodzi w naszym przypadku:

$$3u_1 - 2u_2 = 3 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = u_3,$$

czyli zależność jest spełniona.

Widzimy już, że aby A przeprowadzała kolejne v_i na u_i, wystarczy, że przeprowadza v_1 na u_1 i v_2 na u_2. Wtedy z definicji mnożenia macierzy mamy $Av_3 = u_3$.

lub jego macierz

Aby zdefiniować przekształcenie liniowe, najlepiej określić, jakie wartości przyjmuje na wektorach pewnej bazy. U nas wiemy już, że v_1 musi przejść na u_1, a v_2 na u_2. Trzeba zatem dobrać do v_1 i v_2 trzeci wektor $\tilde{v}_3$, który jest z nimi liniowo niezależny i określić na nim wartość. Tak też robimy – chcemy taki wektor $\tilde{v}_3$, który nie spowoduje powstania zerowego wiersza przy schodkowaniu macierzy:

$$\begin{bmatrix} \leftarrow v_1 \rightarrow \\ \leftarrow v_2 \rightarrow \\ \leftarrow \tilde{v}_3 \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ \leftarrow & \tilde{v}_3 & \rightarrow \end{bmatrix} \sim \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 - 2w_1 \\ \end{array} \end{array}$$

wystarczy wziąć taki $\tilde{v}_3$

Wiemy już, na jakich wektorach definiujemy przekształcenie, teraz tylko pytanie, na co mają one przejść? Oczywiście v_1 na u_1, v_2 na u_2, ale na co przeprowadzamy $\tilde{v}_3$?

Łatwo sprawdzić, że jeśli będzie to jakiś wektor $\tilde{u}_3$, który jest liniowo niezależny z u_1 i u_2, to macierz A przekształcenia będzie odwracalna. Intuicja jest taka, że A przeprowadza wtedy bazę $\tilde{V} = \{v_1, v_2, \tilde{v}_3\}$ na $\tilde{U} = \{u_1, u_2, \tilde{u}_3\}$, a A^{-1} przeprowadza $\tilde{U}$ na $\tilde{V}$, czyli „odwraca" działanie A. Jeśli jednak $\tilde{u}_3$ byłoby kombinacją u_1 i u_2, to macierz A byłaby nieodwracalna.

Pozostałą część zadania, czyli znalezienie wektora $\tilde{u}_3$ i macierzy A (np. metodą z zadania 6.4) zostawiam jako ćwiczenie do pracy samodzielnej.

Sprawdzimy jeszcze tylko podpunkt b. Tutaj:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad u_3 = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sprawdzając warunek na wektory u_i, dostajemy

$$3u_1 - 2u_2 = 3 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \neq u_3,$$

zatem nie istnieje macierz A, która przeprowadza wektory v_i na u_i w tym przypadku.