Zadanie 6.2

Mamy dane wektory:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

i chcemy zobaczyć, czy są niezależne. W tym celu możemy je wpisać kolejno wierszami do macierzy i ją zeschodkować. Jeśli są liniowo niezależne, to nie pojawią się wiersze zerowe.

Intuicja: Schodkując macierz dodajemy / odejmujemy od siebie wiersze, zatem otrzymane w ten sposób nowe wiersze są po prostu kombinacjami liniowymi początkowych v_1, v_2, v_3. Dlatego otrzymanie wiersza zerowego oznacza, że istnieje kombinacja v_1, v_2, v_3, która daje wektor zerowy, a to już jest definicja liniowej zależności.

Schodkujemy macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -13 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ w_2 - 4w_1 \\ w_3 - 7w_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ w_3 - 2w_2 \end{matrix}$$

Po poschodkowaniu nie ma wierszy zerowych, czyli wektory v_1, v_2, v_3 są liniowo niezależne.

Co więcej są one trzy i należą do przestrzeni wymiaru trzy (każdy wektor v_i ma trzy współrzędne, czyli należy do $\mathbb{R}^3$). Stąd przez to, że są liniowo niezależne, tworzą bazę tej przestrzeni*.

* Aby być bazą przestrzeni trzeba spełnić dwa warunki: ① liczba wektorów = wymiar przestrzeni, ② liniowa niezależność wektorów.

Szukamy teraz współrzędnych wektora e_1 w tej bazie. Chcemy znaleźć takie α, β, γ, że zachodzi równość

$$\underset{\underset{e_1}{\shortparallel}}{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}} = \alpha \cdot \underset{\underset{v_1}{\shortparallel}}{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}} + \beta \cdot \underset{\underset{v_2}{\shortparallel}}{\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}} + \gamma \cdot \underset{\underset{v_3}{\shortparallel}}{\begin{bmatrix}7\\8\\8\end{bmatrix}}$$

Innymi słowy, musimy sprawdzić, ile razy wziąć każdy z wektorów v_i, żeby dostać e_1. Łatwo sprawdzić, że powyższemu układowi odpowiada „macierzowe" równanie:

$$\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix} =: x$$

to jest nasz wektor niewiadomych

wprowadzamy oznaczenie dla macierzy, której kolumnami są dane wektory bazy $\mathbb{R}^3$

$$A := \begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\2 & 5 & 8\\3 & 6 & 8\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = e_1$$

taki wynik chcemy dostać z mnożenia $A \cdot x$

Jak rozwiązać to równanie? Stosujemy metodę analogiczną do Gaussa-Jordana. Zapiszemy macierz A, obok niej wektor b, czyli $[A \mid b]$, i będziemy wykonywali operacje na wierszach, żeby dojść do postaci, gdzie po lewej mamy macierz identyczności I (jedynki na przekątnej), a po prawej stronie tylko jakiś wektor c, to znaczy $[I \mid c]$. Jeśli uda nam się dojść do tej formy, to wektor c jest szukanym wektorem niewiadomych.

Intuicja: Dlaczego ta metoda działa?

Zaczynamy od macierzowego zapisu układu równań, na przykład:

dla uproszczenia dwie niewiadome $\longrightarrow$ $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = x$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = b$$

Szukamy α, β, które spełniają te warunki. Jeśli teraz w macierzy A od drugiego wiersza odejmiemy pierwszy pomnożony przez 3 (i tą samą operację zrobimy na wektorze b), to dostaniemy nowy zestaw warunków, które muszą spełniać α i β:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l} w_1 \\ w_2 - 3w_1 \end{array}
$$

Ostatni wiersz mówi, że

$$0 \cdot \alpha + (-5) \cdot \beta = -5$$

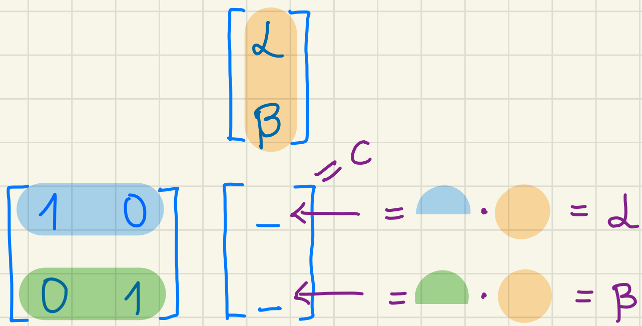
Co jest prawdą, bo α i β spełnia:

$$
\begin{array}{rl}
\boxed{-3} \cdot & 1 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta = 4 \\
+ & 3 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta = 7
\end{array}
\Bigg\}\ \text{z układu na stronie poprzedniej}
$$

$$((-3) \cdot 1 + 3) \cdot \alpha + ((-3) \cdot 2 + 1) \cdot \beta = (-3) \cdot 4 + 7$$

to jest to samo

Operacje na wierszach dają nam zatem równoważne zestawy warunków na szukane niewiadome. Dlatego, jeśli z $[A|b]$ przejdziemy do $[I|c]$, to wektor c jest szukanym wektorem:



Wracamy do zadania i przekształcamy $[A|b]$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \end{array}\right]$$

I etap

schodkowanie

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & -6 & -13 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ w_2 - 2w_1 \\ w_3 - 3w_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ w_3 - 2w_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{3} w_2 \\ -w_3 \end{array}$$

II etap
jedynki na przekątnej

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1 - 7w_3 \\ w_2 - 2w_3 \\ \\ \end{array}$$

III etap
zera nad przekątną

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1 - 4w_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

Stąd szukanymi współrzędnymi są:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \\ -1 \end{bmatrix}$$