Zadanie 5.1 a)

Chcemy znaleźć macierz odwrotną do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

korzystając z metody Gaussa-Jordana. W tym celu z prawej strony obok macierzy A piszemy macierz identyczności, czyli mamy $[A \mid I]$, a następnie operacjami na wierszach chcemy doprowadzić do postaci $[I \mid B]$. Jeśli takie przejście jest możliwe, to otrzymana macierz B jest macierzą odwrotną do macierzy A. W przeciwnym przypadku A^{-1} nie istnieje.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \to w_2 - 3w_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_1 \to w_1 + w_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Pozostaje podzielić drugi wiersz przez -2

$$\xrightarrow{w_2 \to w_2/(-2)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

Operacjami na wierszach otrzymaliśmy macierz postaci $[\, I \mid B \,]$, zatem $B = A^{-1}$. Mamy

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Dostaliśmy wynik, ale pozostaje pytanie: dlaczego ta metoda działa? Spójrzmy najpierw na pierwszą kolumnę szukanej macierzy A^{-1}. Oznaczmy jej elementy przez α i β. Wtedy z definicji mamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_ \\ \_ \end{bmatrix}$$

po lewej mamy układ równań

rozwiązujemy go operacjami na wierszach

pierwsza kolumna iloczynu $A \cdot A^{-1} = I$ to po prostu $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

to jest wynik mnożenia I przez $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, czyli równa się $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$