Zadanie 4.4. d)

Chcemy znaleźć rozkład LDU macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Najpierw schodkujemy macierz A (da nam to rozkład na macierze L i DU).

W pierwszym kroku chcemy odjąć od drugiego wiersza pierwszy wiersz przemnożony przez 2.

Do tego celu używamy macierzy elementarnej

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow$$

ustawiamy pierwszy element w drugim wierszu na -2

Mamy

$$E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Kontynuujemy schodkowanie i od trzeciego wiersza odejmujemy drugi wiersz pomnożony przez 2. Tę operację reprezentuje macierz

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow$$

ustawiamy drugi element w trzecim wierszu na -2

Dostajemy

$$E_2 E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Wynikowa macierz jest już górnotrójkątna, czyli będzie odpowiadała iloczynowi DU.

Najpierw jednak wyznaczamy macierz L:

$$E_2 E_1 A = DU$$

$$\overbrace{E_2^{-1} E_2}^{I} E_1 A = E_2^{-1} DU$$

$$\overbrace{E_1^{-1} E_1}^{I} A = E_1^{-1} E_2^{-1} DU$$

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} DU, \quad \text{czyli} \quad L = E_1^{-1} E_2^{-1}$$

Wyznaczamy $E_1^{-1} E_2^{-1}$.

Jak wygląda macierz odwrotna do macierzy elementarnej? Musi ona „odwracać" akcję, którą reprezentuje ta macierz. Stąd, jeśli macierz E_1 odejmuje od drugiego wiersza pierwszy pomnożony przez 2, to E_1^{-1} będzie dodawać do drugiego wiersza dwukrotność wiersza pierwszego:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Łatwo sprawdzić, że rzeczywiście $E_1 \cdot E_1^{-1} = I$.

Podobnie mamy:

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Możemy już wyznaczyć L:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix} = E_2^{-1}$$

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&2&1\end{bmatrix} \begin{matrix} = 1\cdot \\ = 2\cdot \; + 1\cdot \\ = 1\cdot \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&2&1\end{bmatrix} = E_1^{-1}E_2^{-1} = L$$

Uwaga „na marginesie":

Jak interpretować mnożenie z lewej strony przez macierz elementarną? U nas przez E_1^{-1}

- jedynka na pierwszej pozycji ⇝ przepisz pierwszy wiersz E_2^{-1} do macierzy wynikowej
- na pierwszych dwóch pozycjach 2 i 1 ⇝ w macierzy wynikowej wpisz sumę dwukrotności pierwszego wiersza E_2^{-1} i wiersza drugiego
- jedynka na trzeciej pozycji ⇝ przepisz trzeci wiersz E_2^{-1}

Mamy już L. Teraz trzeba wyznaczyć DU.

Wiemy, że

$$DU = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Chcemy zapisać tę macierz jako iloczyn macierzy przekątniowej D i macierzy górnotrójkątnej U.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

reguła: przepisujemy przekątną macierzy DU

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} = \bullet / 1 \\ = \bullet / 2 \\ = \bullet / (-6) \end{array}$$

reguła: przepisujemy wiersze DU podzielone przez odpowiedni wyraz na przekątnej

W ten sposób dostajemy rozkład A na iloczyn macierzy L (lower triangular), D (diagonal) oraz U (upper triangular).

Uwaga: czasami przed przystąpieniem do schodkowania trzeba zamienić kolejnością wiersze macierzy, na przykład

Zadanie 4.4. e)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Gdybyśmy zaczęli schodkować tę macierz, to wyzerowalibyśmy drugi wiersz. Dlatego najpierw możemy np. zamienić drugi wiersz z trzecim i szukać rozkładu LDU tej nowej macierzy. Formalnie zapisujemy odpowiadającą tej akcji macierz permutacji P i rozważamy macierz PA

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uwaga: ① w teorii możliwe jest też zdefiniowanie rozkładu LDU dla macierzy, która nie jest kwadratowa

② w trakcie wyliczania rozkładu może się okazać, że nie wszystkie wartości wiodące są na przekątnej

Zadanie dodatkowe

Znajdź rozkład LDU macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Najpierw schodkujemy macierz. Odejmujemy dwa razy pierwszy wiersz od drugiego:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

A następnie drugi od trzeciego

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2E_1A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Stąd L ma postać

$$L = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{= E_1^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{= E_2^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Z kolei, aby iloczyn DU dawał taki wynik jak E_2E_1A, przyjmujemy

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

na przekątnej wpisujemy wartości wiodące macierzy docelowej (E_2E_1A)

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

przepisujemy wiersze E_2E_1A podzielone przez wartości wiodące