Zadanie 3.8

Chcemy sprawdzić, kiedy istnieje macierz odwrotna do macierzy $A = (\alpha_{ij})$. Oznaczmy kandydata na A^{-1} przez $B = (\beta_{ij})$. Musi on spełniać:

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} = B$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I = AB \qquad (*)$$

Warto tutaj podkreślić, że macierz A traktujemy jako coś znanego, czyli α_{ij} są dla nas zwykłymi wartościami (stałymi / skalarami), a elementów macierzy B szukamy, czyli β_{ij} są niewiadomymi.

Na podstawie warunku $(*)$ dostajemy układ równań

$$\begin{cases} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} = 1 & (\text{I wiersz } A)\cdot(\text{I kolumna } B) \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} = 0 & (\text{II wiersz } A)\cdot(\text{I kolumna } B) \\ \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} = 0 & (\text{I wiersz } A)\cdot(\text{II kolumna } B) \\ \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} = 1 & (\text{II wiersz } A)\cdot(\text{II kolumna } B) \end{cases}$$

Nawiązując do pierwszych zajęć, zamiast oznaczać zmienne x_1, x_2, x_3, x_4, mamy teraz oznaczenia $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22}$.

Rozpocznijmy od rozpatrzenia przypadku $\alpha_{11} = 0$ i $\alpha_{21} = 0$. Oczywiście jeśli dodatkowo $\alpha_{12} = 0$ lub $\alpha_{22} = 0$, to A jest nieodwracalna (bo ma wiersz zerowy, więc macierz AB też miałaby wiersz zerowy $\Rightarrow$ byłaby różna od I).

W przeciwnym przypadku mamy $\alpha_{12} \neq 0$ i $\alpha_{22} \neq 0$, a dwa pierwsze równania z układu mają postać:

$$\begin{cases} \alpha_{12}\beta_{21} = 1 \\ \alpha_{22}\beta_{21} = 0 \end{cases}$$

Z pierwszego wynika zatem $\beta_{21} = 1/\alpha_{12}$, ale prowadzi to do sprzeczności w drugim równaniu, bo $\alpha_{22}\beta_{21}$ byłoby wtedy różne od 0. Stąd, jeśli $\alpha_{11} = 0$ i $\alpha_{21} = 0$, to macierz A nie jest odwracalna.

Jest to zgodne z warunkiem podanym w zadaniu, ponieważ dla takich α mamy $\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}=0$.

Możemy teraz założyć, że jedna z α w pierwszej kolumnie A jest niezerowa. Bez straty ogólności przyjmijmy, że jest to α_{11}.

Zajmiemy się teraz wyznaczeniem β_{11} i β_{21}, które są opisane przez dwa pierwsze równania układu (równania trzecie i czwarte podają warunki wyłącznie na β_{12} i β_{22}, czyli ta dolna część układu jest w pewnym sensie niezależna od górnej). Mamy:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21}=1 & \quad R1 \\ \alpha_{21}\beta_{11}+\alpha_{22}\beta_{21}=0 & \quad R2 \end{cases}$$

Schodkujemy układ:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21}=1 & \quad R1 \\ \left(\alpha_{22}-\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}\alpha_{12}\right)\beta_{21}=-\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}, & \quad R2-\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}R1 \end{cases}$$

przy czym mogliśmy dzielić przez α_{11}, bo jest $\neq 0$.

Drugie równanie można zapisać w formie

$$\frac{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{11}}\beta_{21} = -\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} \qquad (**)$$

Oczywiście, jeśli $\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21} \neq 0$, to można jednoznacznie wyznaczyć β_{ij}. W szczególności z powyższego mamy

$$\beta_{12} = -\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}},$$

a cała macierz B ma postać:

$$B = \frac{1}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}}\begin{bmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{bmatrix}$$

Stąd, jeśli $\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21} \neq 0$, A jest odwracalna.

Z kolei gdy $\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21} = 0$, to z równania $(**)$ dostajemy $\alpha_{21}=0$, bo prawa strona musi być równa 0. To jednak implikuje $\alpha_{22}=0$, aby $\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}$ było równe 0 (bo mamy już $\alpha_{11}\neq 0$ i $\alpha_{21}=0$). Zatem A nie jest odwracalna, bo jej ostatni wiersz jest zerowy.