Zadanie 2.12

Szukamy macierzy A o wymiarach 2×2, t. że $A^2 = 0$, ale $A \neq 0$. Oznaczmy elementy tej macierzy literami $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Wtedy

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^2+\beta\gamma & \alpha\beta+\beta\delta \\ \gamma\alpha+\delta\gamma & \gamma\beta+\delta^2 \end{bmatrix} = A^2$$

Aby $A^2=0$, wszystkie elementy A^2 muszą być $=0$:

① $\alpha^2+\beta\gamma=0$ ③ $\alpha\beta+\beta\delta=0$

② $\gamma\alpha+\delta\gamma=0$ ④ $\gamma\beta+\delta^2=0$

Z ② dostajemy $\gamma(\alpha+\delta)=0$, zatem $\gamma=0$ lub $\alpha=-\delta$. Rozpatrzymy oba przypadki

1° $\gamma=0$

Wtedy z ① i ④ mamy $\alpha=0$ i $\delta=0$. Wartość β może być w tym przypadku dowolna.

2° $\alpha = -\delta$

Rozważamy dwa podprzypadki

2.1° $\alpha = \delta = 0$

Wtedy z warunków 1 i 4 musimy tylko zapewnić $\beta\gamma = 0$, czyli $\beta = 0$ lub $\gamma = 0$.

2.2° $\alpha \neq 0$

Wówczas z 1 i 4 mamy $\beta\gamma = -\alpha^2$.

Ostatecznie szukane macierze mają postać:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{bmatrix},$$ gdzie $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ i nie są jednocześnie równe zeru

lub

$$A' = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{\alpha^2}{\beta} & -\alpha \end{bmatrix},$$ gdzie $\alpha \neq 0$ i $\beta \neq 0$.