

## Zadania przygotowawcze do kolokwium

1. Następujące układy równań sprowadź do postaci schodkowej i następnie znajdź wszystkie ich rozwiązania:

$$(a) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -6 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -12 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_4 = 4 \end{cases}$$

2. Oblicz

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Sprawdź, czy macierz  $A$  jest odwracalna. Jeśli tak, znajdź macierz do niej odwrotną

$$(a) A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 14 \end{bmatrix}$$

4. Znajdź rozkład  $LDU$  macierzy

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & -2 \\ -3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 9 & -3 & 6 \\ 6 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

5. Zastosuj metodę Gaussa-Jordana znajdowania macierzy odwrotnej do następujących macierzy:

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

6. Dla podanej macierzy  $A$  znajdź bazy wszystkich czterech fundamentalnych przestrzeni związanych z  $A$ . Dla podanego wektora  $b$  opisz wszystkie rozwiązania układu równań  $Ax = b$

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \\ 6 & 12 & 20 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 18 \\ 21 \end{bmatrix}$$

*są to pominięte przykłady z zadania 5. z serii 5.*

7. Znajdź rząd macierzy  $A$ , gdzie

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 9 \\ 5 & 5 & 5 & 8 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

*są to pominięte przykłady z zadania 1. z serii 6.*

8. Znajdź macierz przekształcenia liniowego  $\varphi$ , które przeprowadza wektory bazy  $B = \{b_1, b_2, b_3\}$  na wektory bazy  $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ , tak że  $(b_i) = c_i$  dla  $i = 1, 2, 3$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, c_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix},$$

*jest to pominięty przykład z zadania 4. z serii 6.*