ZŁO* — ćwiczenia 3

Podstawowe klasy złożoności

Ćwiczenia oznaczone przez $\diamondsuit$ są z poprzednich ćwiczeń. Zrobimy je jeśli będą pomysły na sali. Ćwiczenia oznaczone przez $\spadesuit$ będziemy robić w miarę możliwości czasowych. Jeśli nie starczy czasu, to zostaną do przemyślenia w domu i następne ćwiczenia zaczniemy od wybranych z nich.

Przypomnienie definicji

Funkcja f jest *pamięciowo konstruowalna* jeśli istnieje maszyna wsadowa, która dostawszy słowo 1^n, zapisuje na taśmie roboczej dokładnie $f(n)$ komórek używając pamięci $\mathcal{O}(f(n))$. Funkcja f jest *czasowo konstruowalna* jeśli istnieje maszyna wsadowa, która dostawszy słowo 1^n, zapisuje na taśmie roboczej dokładnie $f(n)$ komórek używając czasu $\mathcal{O}(f(n))$.

Klasa L (logspace) obejmuje języki rozpoznawalne przez maszynę wsadową używającą $\mathcal{O}(\log n)$ pamięci roboczej. Klasa $\mathsf{P} = \bigcup_k \mathsf{DTIME}(n^k)$ obejmuje języki rozpoznawalne w deterministycznym czasie wielomianowym. Klasa $\mathsf{NP} = \bigcup_k \mathsf{NTIME}(n^k)$ obejmuje języki rozpoznawalne w niedeterministycznym czasie wielomianowym. Klasa $\mathsf{PSPACE} = \bigcup_k \mathsf{DSPACE}(n^k)$ obejmuje języki rozpoznawalne w pamięci wielomianowej.

Zadania

Zadanie 1 ($\diamondsuit$). *Automat wielogłowicowy* chodzi po słowie wejściowym przy pomocy pewnej stałej liczby głowic. Przejścia automatu zależą od krotki symboli pod głowicami, a operacja wykonana w przejściu polega na ruszeniu się każdej głowicy. Uwaga: automat nie pisze po słowie, jedynie czyta symbole i rusza głowicami. Wykazać, że dany język L jest rozpoznawalny przez pewien automat wielogłowicowy wtedy i tylko wtedy gdy jest rozpoznawalny przez maszynę Turinga działającą w logarytmicznej pamięci.

Zadanie 2 ($\diamondsuit$). Rozstrzygnąć, które funkcje są pamięciowo i/lub czasowo konstruowalne:

(a) $f(n) = n$;

(b) $f(n) = n^2$;

(c) $f(n) = 2^n$;

(d) $f(n) = \lceil \log_2 n \rceil$.

Zadanie 3 ($\diamondsuit$). Język L jest zdefiniowany jako zbiór słów postaci:

$$\#0\ldots000\#0\ldots001\#0\ldots010\#0\ldots011\#\ldots\#1\ldots111\#.$$

gdzie każdy blok ma długość k dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ (czyli zapisy binarne wszystkich liczb od 0 do $2^k - 1$). Udowodnić, że L da się rozpoznać w pamięci $\mathcal{O}(\log\log n)$.

Zadanie 4. Wykaż, że każda z klas L, P, NP, PSPACE jest zamknięta na złożenia funkcji. Uwaga: W przypadku L, maszyna pisze wyjście używając w tranzycjach operacji $\mathtt{output}(\sigma)$, która dokleja na końcu budowanego wyjścia symbol σ.

Zadanie 5. Wykaż, że poprawne wyrażenia nawiasowe, przykładowo $((())())$, da się rozpoznawać w logarytmicznej pamięci. A jak będzie jeśli w wyrażeniu moga się pojawiać dwa rodzaje nawiasów: () oraz []?

Zadanie 6. Dana jest formuła logiczna nie używająca zmiennych, innymi słowy, term nad operacjami logicznymi $\wedge$, $\vee$, $\neg$, gdzie w liściach są stałe. Wykaż, że można obliczyć wartość logiczną takiej formuły w logarytmicznej pamięci.

Zadanie 7. Ustalmy pewną skończoną algebrę $\mathbb{A}$: składa się ona ze skończonego nośnika A oraz skończonego zbioru funkcji $\mathcal{F}$. Każda funkcja $f \in \mathcal{F}$ ma ustaloną arność r, i działa z A^r w A. Rozważmy następujący problem: dany term τ nad $\mathbb{A}$ ze stałymi w liściach, należy wyewaluować τ. Udowodnij, że ten problem da się rozwiązać w pamięci logarytmicznej.

Zadanie 8 (♠). Udowodnij, że klasy NL, P, NP, oraz PSPACE są zamknięte na gwiazdkę Kleene'ego, czyli jeśli L jest w klasie, to

$$L^\star = \{u_1 u_2 \dots u_n \colon u_i \in L\}$$

też jest w klasie.