ZŁO* — ćwiczenia 4

Klasy złożoności oraz obwody

Ćwiczenia oznaczone przez $\diamondsuit$ są z poprzednich ćwiczeń. Zrobimy je jeśli będą pomysły na sali. Ćwiczenia oznaczone przez $\spadesuit$ będziemy robić w miarę możliwości czasowych. Jeśli nie starczy czasu, to zostaną do przemyślenia w domu i następne ćwiczenia zaczniemy od wybranych z nich.

Przypomnienie definicji

Klasa AC^0 obejmuje funkcje $\{0,1\}^\star \to \{0,1\}$ obliczalne przez wielomianowe obwody o stałej głębokości używające bramek NOT oraz AND i OR o nieograniczonym stopniu wejściowym. Klasa NC^1 obejmuje funkcje $\{0,1\}^\star \to \{0,1\}$ obliczalne przez wielomianowe obwody o głębokości $\mathcal{O}(\log n)$ używające bramek NOT oraz AND i OR o stopniu wejściowym równym 2.

Zadania

Zadanie 1 ($\diamondsuit$). Ustalmy pewną skończoną algebrę $\mathbb{A}$: składa się ona ze skończonego nośnika A oraz skończonego zbioru funkcji $\mathcal{F}$. Każda funkcja $f \in \mathcal{F}$ ma ustaloną arność r, i działa z A^r w A. Rozważmy następujący problem: dany term τ nad $\mathbb{A}$ ze stałymi w liściach, należy wyewaluować τ. Udowodnij, że ten problem da się rozwiązać w pamięci logarytmicznej.

Zadanie 2 ($\diamondsuit$). Udowodnij, że następujący problem jest w NP. Dany jest alfabet Σ (dowolnie duży, dany na taśmie) oraz wyrażenie regularne r nad Σ. Pytanie: czy istnieje słowo w języku generowanym przez r, które zawiera wszystkie litery z Σ.

Zadanie 3. Funkcja $\mathsf{majority}$ dla danego ciągu bitów długości n zwraca 0 jeśli mniej niż połowa wejściowych bitów to jedynki, oraz 1 w przeciwnym przypadku. Skonstruuj obwód dla $\mathsf{majority}$ używający binarnych bramek AND, OR, oraz NOT, o następująch parametrach:

(a) wielkości $\mathcal{O}(n \log n)$;

(b) wielkości $\mathrm{poly}(n)$ i głębokości $\mathcal{O}(\log n)$.

Zadanie 4. Skonstruuj obwód o wielomianowej wielkości i stałej głębokości dla funkcji parity, używający binarnych bramek AND, OR, oraz NOT, oraz bramek $\mathsf{majority}$ o nieograniczonym stopniu wejściowym.

Zadanie 5. Wykaż, że każdy język regularny jest w NC^1.

Zadanie 6. Język regularny jest *bezgwiazdkowy* (ang. *star-free*) jeśli można go opisać wyrażeniem regularnym nie używającym gwazdki Kleene'ego, tzn. opisywalnym gramatyką

$$R \to \alpha \mid \emptyset \mid (\neg R) \mid (RR) \mid (R + R),$$

gdzie α to symbol alfabetu. Udowodnij, że każdy język bezgwiazdkowy jest w AC^0.

Zadanie 7. Język L nad alfabetem Σ nazwiemy definiowalnym w logice pierwszego rzędu jeśli istnieje formuła φ nad sygnaturą $\Sigma \cup \{<\}$ o następującej własności: jeśli dane słowo nad Σ rozważymy jako strukturę w której każdy $\sigma \in \Sigma$ jest interpretowany jako relacja unarna kodująca pozycje na których stoi σ, zaś relacja $<$ jest interpretowana jako relacja binarna kodująca porządek w słowie, to φ_L rozpoznaje dokładnie słowa z języka L. Wykaż, że każdy język definiowalny w logice pierwszego rzędu należy do AC^0.

Zadanie 8 (♠). W tym zadaniu zajmujemy się obwodami z bramkami AND, OR, i NOT o nieograniczonym stopniu wejściowym. Przez *wielkość* obwodu rozumiemy sumaryczną liczbę drutów.

(a) Wykaż, że dla każdego $\varepsilon > 0$, dla dostatecznie dużych n istnieje funkcja $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, która nie ma obwodu wielkości co najwyżej $1000 \cdot \frac{2^n}{n^{1+\varepsilon}}$.

(b) Wykaż, że każda funkcja boolowska $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ma obwód wielkości co najwyżej $1000 \cdot 2^n$.

(c) Wykaż, że każda funkcja boolowska $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ma obwód używający co najwyżej $1000 \cdot \frac{2^n}{n}$ bramek.

(d) Wykaż, że każda funkcja boolowska $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ma obwód wielkości co najwyżej $1000 \cdot \frac{2^n}{n}$.