

Egzamin z Analizy Matematycznej I

dla Informatyków, 28 I 2016 — Część I

Czas na rozwiązanie zadań cz. I: **2 godz.** Do zdobycia: 60 pkt.

Nie wolno korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.

Imię i nazwisko: numer indeksu:

Zadanie 1.

Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a**), **b**), ...) — bez uzasadnień, dla punktu **B** — *musi być dowód*.

A.) [7 pkt] Sformułuj pięć dowolnie wybranych aksjomatów *z zestawu aksjomatów liczb rzeczywistych*, które dotyczą nierówności $\leq$.

B. a) [4 pkt] Czy to prawda, że dla każdej pary ograniczonych ciągów liczbowych $\{a_n\}_{n \geq 1}$ oraz $\{b_n\}_{n \geq 1}$ zachodzi: $\sup\{a_n + b_n : n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} + \sup\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$?

VERTE

B. b) [4 pkt] Czy to prawda, że dla każdej pary ciągów liczbowych $\{a_n\}_{n \geq 1}$ oraz $\{b_n\}_{n \geq 1}$ zachodzi:
 $\sup\{a_n + b_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} + \sup\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$?

Imię i nazwisko: numer indeksu:

Zadanie 2.

Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a**), **b**),...) — bez uzasadnień, dla punktu **B** — musi być dowód.

A. a) [5 pkt] Sformułuj twierdzenia *o trzech ciągach* i *o przechodzeniu z nierównością do granicy*.

A. b) [tylko 0 lub 2 pkt] Rozstrzygnij o prawdziwości każdego z poniższych zdań, wpisując odpowiednio “TAK” lub “NIE” w ramce.

☐

Dla każdej pary ciągów zbieżnych $\{a_n\}_{n \geq 1}$, $\{b_n\}_{n \geq 1}$ zachodzi:
jeśli $a_n < b_n$ dla dostatecznie dużych n , to $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

☐

Dla każdej pary ciągów zbieżnych $\{a_n\}_{n \geq 1}$, $\{b_n\}_{n \geq 1}$ zachodzi:
jeśli $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$, to $a_n < b_n$ dla dostatecznie dużych n .

VERTE

B. [8 pkt] Przedstaw dowód twierdzenia *o trzech ciągach* dla przypadku granicy rzeczywistej.

Imię i nazwisko: numer indeksu:

Zadanie 3.

Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a**), **b**),...) — bez uzasadnień, dla punktu **B** — *musi być dowód*.

A. a) [4 pkt] Podaj definicję *asymptotycznego podobieństwa* ciągów i sformułuj kryterium *asymptotyczne* zbieżności szeregów.

A. b) [3 pkt] Sformułuj kryterium *Dirichleta* zbieżności szeregów.

B. a) [3 pkt] Czy to prawda, że dla każdej pary szeregów zbieżnych bezwzględnie ich suma jest także szeregiem zbieżnym bezwzględnie?

VERTE

B. b) [2 pkt] Czy to prawda, że szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{(n^4)}}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n(n+1)}}{n^{\frac{5}{4}}} \right)$ jest zbieżny?

B. c) [3 pkt] Czy to prawda, że szereg z podpunktu b) jest zbieżny warunkowo?

Imię i nazwisko: numer indeksu:

Zadanie 4.

Rozwiązanie punktu A (i ew. podp. a), b),...) — bez uzasadnień, dla punktu B — musi być dowód.

A. a) [4 pkt] Podaj definicję funkcji jednostajnie ciągłej i sformułuj dowolne znane Ci z wykładu twierdzenie dotyczące jednostajnej ciągłości.

A. b) [3 pkt] Podaj przykład funkcji ciągłej $f : [0; 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie jest jednostajnie ciągła.

VERTE

B [8 pkt] Dla każdego z poniższych założeń osobno:

- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą
- b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją jednostajnie ciągłą
- c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada skończoną granicę w $+\infty$
- d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona i ściśle rosnąca,

rozstrzygnij, czy każda f spełniająca to założenie posiada własność:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(\sqrt{x+1}) - f(\sqrt{x}) = 0.$$

Egzamin z Analizy Matematycznej I

dla Informatyków, 28 I 2016

— Część II

Czas na rozwiązanie zadań cz. II: **2 godz.**

Nie wolno korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.

Rozwiązania **muszą zawierać dowód**, jako swą zasadniczą część. Kolejne kroki dowodu, pomijając zupełnie elementarne, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te **należy każdorazowo wskazywać** w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).

Rozwiązania zadań muszą być napisane na **osobnych** kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu **imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu** oraz poniżej — **numerem zadania**.

Każde zadanie jest warte **15 pkt.**

Zadanie 1. Wyznacz kresy (inf i sup) zbioru $B := \left\{ \sqrt[n]{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \right\}$.

Zadanie 2. Wykaż zbieżność i znajdź granicę ciągu $\{a_n\}_{n \geq 0}$ spełniającego warunki

$$a_0 = -1, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{dla wszystkich } n \geq 0,$$

gdzie $f : \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty)$ jest funkcją ciągłą taką, że

$$f(0) = 0 \quad \text{ i } \quad \forall_{x>0} f(x) < x.$$

Zadanie 3. Zbadaj zbieżność szeregów

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\sin \frac{1}{n}\right)^2}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}},$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$

Zadanie 4. Turysta Jaś wybrał się na dwie wycieczki wzdłuż szlaku — przedziału $[a; b]$ prostej rzeczywistej: pierwsza - od a do b , druga zaś - od b do a . W czasie obu wycieczek Jaś szedł naprzód nie zatrzymując się i nie zwracając, a przy starcie Jaś za każdym razem uruchamiał swój wyzerowany uprzednio stoper, by zmierzyć czas marszu. Podczas obu wycieczek czas wskazywany przez stoper zależał w sposób ciągły od położenia Jasia na szlaku. **Udowodnij**, że istnieje takie miejsce na szlaku, w którym stoper Jasia pokazywał ten sam czas podczas pierwszej i podczas drugiej wycieczki.