

Egzamin poprawkowy z Analizy Matematycznej I

dla Informatyków, 22 II 2016 — Część I

Czas na rozwiązanie zadań cz. I: **2 godz.** Do zdobycia: 60 pkt.

Nie wolno korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.

Imię i nazwisko: numer indeksu:

Zadanie 1.

Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a**), **b**), ...) — bez uzasadnień, dla punktu **B** — *musi być dowód*.

A. a) [4 pkt] Podaj definicję *ograniczenia dolnego* i *kresu dolnego* zbioru $A \subset \mathbb{R}$.

A. b) [tylko 0 lub 3 pkt] Podaj przykład takiego $A \subset \mathbb{R}$, który nie zawiera żadnych przedziałów postaci $(c; d)$, gdzie $c, d \in \mathbb{R}$ i $c < d$ oraz dla którego spełnione są wszystkie poniższe warunki:

$$\sup A, \inf A \in A, \quad \inf(A \setminus \{\inf A\}) = \inf A, \quad \sup(A \setminus \{\sup A\}) \neq \sup A.$$

VERTE

B. [8 pkt] Rozstrzygnij o prawdziwości każdego z poniższych zdań:

- a) Dla każdej pary ograniczonych ciągów liczbowych $\{a_n\}_{n \geq 1}$ oraz $\{b_n\}_{n \geq 1}$ zachodzi
 $\inf\{a_n + b_n : n \in \mathbb{N}\} \geq \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} + \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}.$
- b) Dla każdej pary malejących ograniczonych ciągów liczbowych $\{a_n\}_{n \geq 1}$ oraz $\{b_n\}_{n \geq 1}$ zachodzi
 $\inf\{a_n + b_n : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} + \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}.$
- c) Dla każdej pary rosnących ograniczonych ciągów liczbowych $\{a_n\}_{n \geq 1}$ oraz $\{b_n\}_{n \geq 1}$ zachodzi
 $\inf\{a_n + b_n : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} + \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}.$

Imię i nazwisko: numer indeksu:

Zadanie 2.

Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a**), **b**),...) — bez uzasadnień, dla punktu **B** — *musi być dowód*.

A. a) [4 pkt] Sformułuj twierdzenie *Bolzano – Weierstrassa*.

A. b) [tylko 0 lub 3 pkt] Rozstrzygnij o prawdziwości każdego z poniższych zdań, wpisując odpowiednio “TAK” lub “NIE” w ramce.

☐

Każdy ciąg ograniczony z góry posiada podciąg malejący.

☐

Każdy ciąg rozbieżny do $+\infty$ posiada podciąg ściśle rosnący.

☐

Każdy ciąg, który posiada podciąg ściśle rosnący oraz podciąg ściśle malejący jest rozbieżny.

VERTE

B. [8 pkt] Rozstrzygnij o prawdziwości każdego z poniższych zdań:

- a) Dla każdego ciągu zbieżnego $\{a_n\}_{n \geq 1}$ i każdego rozbieżnego do $+\infty$ ciągu liczb naturalnych $\{k_n\}_{n \geq 1}$ ciąg $\{a_{k_n}\}_{n \geq 1}$ jest zbieżny.
- b) Dla każdego ciągu zbieżnego $\{a_n\}_{n \geq 1}$ i każdego zbieżnego ciągu liczb naturalnych $\{k_n\}_{n \geq 1}$ ciąg $\{a_{k_n}\}_{n \geq 1}$ jest zbieżny.
- c) Dla każdego ciągu zbieżnego $\{a_n\}_{n \geq 1}$ i każdego nieograniczonego ciągu liczb naturalnych $\{k_n\}_{n \geq 1}$ ciąg $\{a_{k_n}\}_{n \geq 1}$ jest zbieżny.

Imię i nazwisko: numer indeksu:

Zadanie 3.

Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a**), **b**),...) — bez uzasadnień, dla punktu **B** — *musi być dowód*.

A. a) [3 pkt] Sformułuj kryterium *porównawcze* zbieżności szeregów.

A. b) [4 pkt] Podaj definicję *asymptotycznego podobieństwa* ciągów i sformułuj kryterium *asymptotyczne* zbieżności szeregów.

VERTE

B. a) [4 pkt] Wyznacz **wszystkie** parametry $\alpha > 0$, takie że każdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, spełniających $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} a_n = 1$ jest zbieżny.

B. b) [4 pkt] Czy to prawda, że szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ jest zbieżny?

Imię i nazwisko: numer indeksu:

Zadanie 4.

Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a**), **b**),...) — bez uzasadnień, dla punktu **B** — *musi być dowód*.

A. a) [4 pkt] Sformułuj twierdzenie Weierstrassa „o osiągnięciu kresów”.

A. b) [tylko 0 lub 3 pkt] O każdym z poniższych zbiorów rozstrzygnij, czy jest on obrazem pewnej funkcji ciągłej $f : [0; 10] \cup [12; 20) \longrightarrow \mathbb{R}$, wpisując odpowiednio “TAK” lub “NIE” w ramce.

☐ $[0; 1]$

☐ $[0; 1] \cup (3; 5) \cup \{7\}$

☐ $(0; 1)$

VERTE

B. [8 pkt] Przedstaw dowód twierdzenia Weierstrassa „o osiągnięciu kresów”.

Egzamin poprawkowy z Analizy Matematycznej I

dla Informatyków, 22 II 2016

— Część II

Czas na rozwiązanie zadań cz. II: **2 godz.**

Nie wolno korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.

Rozwiązania **muszą zawierać dowód**, jako swą zasadniczą część. Kolejne kroki dowodu, pomijając zupełnie elementarne, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te **należy każdorazowo wskazywać** w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).

Rozwiązania zadań muszą być napisane na **osobnych** kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu **imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu** oraz poniżej — **numerem zadania**.

Każde zadanie jest warte **15 pkt.**

Zadanie 1. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $a \in \mathbb{R}$. Wykaż, że jeśli $0 \leq a \leq \frac{1}{2n}$, to

$$(1 + a)^n \leq 1 + 2an.$$

Zadanie 2. Wykaż zbieżność i znajdź granice ciągów zadanych poniższymi wzorami dla $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{a) } a_n = n \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{100} \frac{k^{\frac{1}{n}}}{n^{\frac{1}{k}}}}, \quad \text{b) } b_n = (n!) \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{100} \frac{k^{\frac{1}{n!}}}{(n!)^{\frac{1}{k}}}}.$$

Zadanie 3. Zbadaj zbieżność szeregów:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n^{888}) \left(\sqrt{n + \frac{1}{n}} - \sqrt{n} \right), \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Zadanie 4. Wykaż, że istnieje $x \in [0; 1]$ taki, że

$$e^{1-x} - x^2 = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{e^y - 1}.$$