

Kolokwium z Analizy Matematycznej dla Informatyków, 12 V 2016 (ok. godz. 14.)

- Proszę o rozwiązania każdego z zadań na osobnych, czytelnie oznaczonych kartkach:
w lewym górnym rogu *własne imię, nazwisko, nr indeksu oraz niżej — „Zadanie nr ...”*
w prawym górnym rogu *nr grupy ćwiczeniowej*.
- Podczas kolokwium nie wolno korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.
- Rozwiązanie każdego zadania powinno być opatrzone dowodem. Poszczególne kroki dowodu, poza zupełnie elementarnymi, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu; ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te należy każdorazowo wskazywać w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwy).
- Każde z zadań warte jest **15 pkt.**
- Czas na rozwiązanie zadań: **2,5 godz.**

Zadanie 1.

Znajdź jakiegokolwiek wymierne przybliżenie liczby $\cos(\sqrt{2})$ z dokładnością do $\frac{1}{10}$.

Zadanie 2.

Rozważamy funkcję $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{5^n} \operatorname{arctg}(nx)$.

- a) Wykaż, że F jest poprawnie określona, tj. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{5^n} \operatorname{arctg}(nx)$ jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$.
b) Udowodnij, że F jest ciągła. c) Czy F jest różniczkowalna? Jeśli tak, oblicz $F'(0)$.

Zadanie 3.

Oblicz całki: a) $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx$, b) $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x} \, dx$

oraz rozstrzygnij, czy całka z b) jest większa od $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Zadanie 4.

Funkcję $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *stałą z prawej* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{x, y \geq M} f(x) = f(y).$$

Rozważmy ciąg funkcyjny $\{f_n\}$, którego każdy wyraz jest stały z prawej. Rozstrzygnij, czy f musi być stała z prawej, jeśli:

- a) $\{f_n\}$ jest punktowo zbieżny do f ; b) $\{f_n\}$ jest jednostajnie zbieżny do f .