

Egzamin poprawkowy z Analizy Matematycznej II

dla Informatyków, 5 IX 2016 — Część I

Czas na rozwiązanie zadań cz. I: **2 godz.** Do zdobycia: 60 pkt.

Nie wolno korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.

Imię i nazwisko: numer indeksu:

Zadanie 1.

Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a**), **b**), ...) — bez uzasadnień, dla punktu **B** — *musi być dowód*.

A. a) [4 pkt] Sformułuj twierdzenie *Peano o postaci reszty Taylora*.

A. b) [4=2+1+1 pkt] Dla funkcji f zadanej na $\mathbb{R}$ wzorem $f(x) = \sin(\sin(x))$ wypisz 1-szy wielomian Taylora o środku w $x_0 = 0$. Podaj wartość tego wielomianu w punkcie $x = \frac{1}{2016}$. Podaj także wartość 1-szej reszty Taylora dla f , dla tych samych x_0 i x .

VERTE

B.) [7=2 x 3,5 pkt] Znajdź poniższe granice funkcji:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2}$

Imię i nazwisko: numer indeksu:

Zadanie 2.

Rozwiązanie punktu A (i ew. podp. a), b),...) — bez uzasadnień, dla punktu B — musi być dowód.

A. a) [6=3 x 2 pkt] Podaj definicje trzech rodzajów zbieżności ciągu funkcyjnego: punktowej, jednostajnej i niemal jednostajnej.

A. b) [2 pkt] Podaj przykład takiego szeregu funkcyjnego, który **nie** jest zbieżny punktowo.

VERTE

B. a) [3,5 pkt] Czy jest możliwe, aby ciąg funkcyjny, którego wyrazami są funkcje różniczkowalne, był zbieżny punktowo do funkcji nieciągłej?

B. b) [3,5 pkt] Czy jest możliwe, aby ciąg funkcyjny, którego wyrazami są funkcje nieciągłe, był zbieżny jednostajnie do funkcji różniczkowalnej?

Imię i nazwisko: numer indeksu:

Zadanie 3.

Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a**), **b**), ...) — bez uzasadnień, dla punktu **B** — *musi być dowód*.

A. a) [4 pkt] Dla funkcji $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zadanej wzorem $f(x) = x$ i podziału P „na trzy przedziały równej długości” podaj wartości sumy dolnej ($\check{S}(f, P)$) oraz górnej ($\hat{S}(f, P)$).

A. b) [3 pkt] Oblicz całkę górną i całkę dolną z powyższej funkcji f .

A. c) [1 pkt] Czy to prawda, że dla każdej funkcji ciągłej $g: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ całka Riemanna z g (tzn. $\int_{[0;1]} g(t) dt$) jest równa całce oznaczonej z g (tzn. $\int_0^1 g(t) dt$)?

VERTE

B. a) [4 pkt] Oblicz całkę $\int_{[0;1]} x^7 e^{(x^4)} dx$.

B. b) [3 pkt] Znajdź wszystkie $\alpha \in \mathbb{R}$, dla których całka niewłaściwa $\int_0^2 \frac{\sin(x^2)}{x^\alpha} dx$ jest zbieżna.

Imię i nazwisko: numer indeksu:

Zadanie 4.

Rozwiązanie punktu A (i ew. podp. a), b),...) — bez uzasadnień, dla punktu B — musi być dowód.

A. a) [3 pkt] Podaj przykład takiej metryki dla zbioru $\mathbb{R}$, że każda kula otwarta o promieniu $\sqrt{2}$ jest zbiorem jednopunktowym.

A. b) [5 pkt] Sformułuj twierdzenie *o mnożnikach Lagrange'a*.

VERTE

B. [7 pkt] Podaj dowód twierdzenia *o ciągłości funkcji różniczkowalnej* (dla wielu zmiennych).

Egzamin poprawkowy z Analizy Matematycznej II

dla Informatyków, 5 IX 2016 — Część II

Czas na rozwiązanie zadań cz. II: **2 godz.**

Nie wolno korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.

Rozwiązania **muszą zawierać dowód**, jako swą zasadniczą część. Kolejne kroki dowodu, pomijając zupełnie elementarne, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te **należy każdorazowo wskazywać** w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).

Rozwiązania zadań muszą być napisane na **osobnych** kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu **imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu** oraz poniżej — **numerem zadania**.

Każde zadanie jest warte **15 pkt.**

Zadanie 1. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcjąadaną wzorem $f(x) = e^{(e^x - 1)}$.

Zbadaj, czy dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $f(a) - 1 - a \geq 0$.

Dodatkowo możesz pomyśleć nad kolejnym pytaniem (ale za niewielką i nieznaną jeszcze liczbę punktów, więc najlepiej myślenie rozpocznij dopiero, jeśli zostanie Ci czas po zrobieniu reszty zadań...): Czy dla każdego $a \geq 0$ zachodzi $f(a) - 1 - a \geq a^2$?

Zadanie 2. Dla każdego $n \geq 1$ określamy funkcję $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{n+x^2}}{n^2+e^x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- a) Wykaż, że wzór $F(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ poprawnie określa funkcję $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (tj., że szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ jest zbieżny dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$).
- b) Udowodnij, że F jest różniczkowalna i zbadaj jaki znak ma liczba $F'(0)$ ($-$, $+$, czy 0).
- c) Zbadaj, czy istnieje skończona granica funkcji F w punkcie 0 , a jeśli TAK, to zbadaj, czy ta granica jest większa niż $\frac{3}{4}$.

Zadanie 3. Funkcja $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i wypukła. Wykaż, że

$$\int_{[0;1]} f(t) dt \leq \frac{f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)}{4} \leq \frac{f(0) + f(1)}{2}.$$

Wskazówka: ewentualnie wykaż najpierw

Lemat Jeśli $b \geq a$ i $g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i wypukła, to

$$\int_{[a;b]} g(t) dt \leq \frac{g(a) + g(b)}{2}(b-a).$$

Zadanie 4. Niech $K = \{(x, y, z) : x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 1\}$ oraz niech $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcjąadaną wzorem $f(x, y, z) = x - 2y + 3z$.

- a) Czy $f(K)$ posiada element największy?
- b) Znajdź $\sup f(K)$.