

# Egzamin z Analizy Matematycznej II

## dla Informatyków, 20 VI 2016 — Część I

Czas na rozwiązanie zadań cz. I: **2 godz.** Do zdobycia: 60 pkt.

**Nie wolno** korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.

Imię i nazwisko: ..... numer indeksu: .....

### Zadanie 1.

Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a**), **b**),...) — bez uzasadnień, dla punktu **B** — *musi być dowód*.

---

**A. a) [6 pkt]** Sformułuj dwa różne twierdzenia z wykładu, dotyczące *postaci reszty Taylora*.

---

**A. b) [2 pkt]** Wypisz trzeci wielomian Taylora funkcji  $f$  o środku w 1 oraz podaj **jego** wartość w punkcie 1 dla funkcji zadanej na  $\mathbb{R}$  wzorem  $f(x) = e^{(x^2)}$ .

VERTE

---

B.) [7 pkt] Sformułuj twierdzenie *Rolle'a o wartości średniej* i przedstaw jego dowód.

Imię i nazwisko: ..... numer indeksu: .....

**Zadanie 2.**

Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a**), **b**), ...) — bez uzasadnień, dla punktu **B** — *musi być dowód*.

---

**A. a) [4 pkt]** Uzupełnij treść znanego z wykładu twierdzenia **o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie** (tzn. o różniczkowaniu granicy ciągu funkcyjnego — w wersji dla szeregów).

Niech  $I$  będzie przedziałem oraz  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  niech będą funkcjami różniczkowalnymi dla wszystkich  $n \geq 1$ . Wówczas jeśli

to funkcja zadana na  $I$  wzorem  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  jest różniczkowalna oraz dla każdego  $x \in I$

$$f'(x) = \quad .$$

---

**A. b) [za <5 poprawnych 0 pkt, za 5 poprawnych 2 pkt, za wszystkie 4 pkt]** Rozstrzygnij o prawdziwości każdego z poniższych zdań, dotyczących funkcji z  $\mathbb{R}$  w  $\mathbb{R}$ , wpisując odpowiednio “TAK” lub “NIE” w ramce.

☐

Granica punktowa każdego ciągu funkcji różniczkowalnych jest funkcją ciągłą.

☐

Granica jednostajna każdego ciągu funkcji różniczkowalnych jest funkcją ciągłą.

☐

Granica punktowa każdego ciągu funkcji różniczkowalnych jest funkcją różniczkowalną.

☐

Granica jednostajna każdego ciągu funkcji różniczkowalnych jest funkcją różniczkowalną.

☐

Granica punktowa każdego ciągu funkcji wypukłych jest funkcją wypukłą.

☐

Granica jednostajna każdego ciągu funkcji wypukłych jest funkcją wypukłą.

**VERTE**

---

**B. [7 pkt]** Sformułuj twierdzenie *o ciągłości granicy* (dotyczące granic ciągów funkcyjnych) i **przedstaw jego dowód**.

Imię i nazwisko: ..... numer indeksu: .....

**Zadanie 3.**

Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a**), **b**),...) — bez uzasadnień, dla punktu **B** — musi być dowód.

---

**A. a) [3 pkt]** Sformułuj *twierdzenie o sumach Riemanna*.

---

**A. b) [2 pkt]** Podaj wartość  $\int_1^2 x \ln x dx$ .

---

**A. c) [2 pkt]** Podaj wartość  $\int_{[0; \frac{\pi}{4}]} \operatorname{tg} x dx$ .

---

**B. a) [4 pkt]** Podaj jeden przykład takiego ciągu liczb  $\{a_n\}_{n \geq 1}$ , który jest ciągiem pewnych sum Riemanna dla funkcji  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  zadanej wzorem  $f(x) = e^{(x^2)}$  (i dla pewnych podziałów przedziału  $[0; 1]$ ) i który jest zbieżny do całki Riemanna z tej funkcji.

VERTE

---

**B. b) [2 pkt]** Znajdź wszystkie  $\alpha \in \mathbb{R}$ , dla których całka  $\int_0^\infty x \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)^\alpha dx$  jest zbieżna.

---

**B. c) [2 pkt]** Znajdź wszystkie  $\alpha \in \mathbb{R}$ , dla których zachodzi nierówność

$$\int_0^\infty x \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)^\alpha dx \leq 1.$$

Imię i nazwisko: ..... numer indeksu: .....

**Zadanie 4.**

Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a**), **b**),...) — bez uzasadnień, dla punktu **B** — *musi być dowód*.

---

**A. a) [3 pkt]** Podaj definicje następujących rodzajów podzbiorów w przestrzeni metrycznej  $(X, \rho)$ : *otwartego, ograniczonego, domkniętego*.

---

**A. b) [3 pkt]** Sformułuj twierdzenie *o przeciwobrazach* (dotyczące własności przeciwobrazów pewnych zbiorów względem funkcji ciągłych).

---

**A. c) [4 pkt]** Sformułuj twierdzenie *o mnożnikach Lagrange'a*.

VERTE

---

**B. [5 pkt]** Podaj przykład pewnej funkcji  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ , która jest różniczkowalna w 0 i jej różniczka w 0 **nie** jest zerowa,

a następnie *znajdź dla niej:*

a) *macierz Jakobiego* w 0

$$MJf(0) =$$

b) *różniczkę* w 0

$$DJf(0) =$$

c) *pochodną kierunkową* w 0 w kierunku wektora  $v = (1, 2)$

$$\partial_v f(0) =$$

d) *pochodną cząstkową* po drugiej zmiennej w 0

$$\partial_2 f(0) =$$



# Egzamin z Analizy Matematycznej II

## dla Informatyków, 20 VI 2016 — Część II

Czas na rozwiązanie zadań cz. II: **2 godz.**

**Nie wolno** korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.

Rozwiązania **muszą zawierać dowód**, jako swą zasadniczą część. Kolejne kroki dowodu, pomijając zupełnie elementarne, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te **należy każdorazowo wskazywać** w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).

Rozwiązania zadań muszą być napisane na **osobnych** kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu **imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu** oraz poniżej — **numerem zadania**.

Każde zadanie jest warte **15 pkt.**

**Zadanie 1.** Zbadaj ile pierwiastków  $x \in \mathbb{R}$ , w zależności od parametru  $a > 0$ , posiada równanie

$$a^x = 2016x.$$

**Zadanie 2.**

a) Wykaż **Twierdzenie „o zerach”**:

*Jeżeli ciąg  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  ciągłych funkcji rzeczywistych określonych na  $D \subset \mathbb{R}$  jest zbieżny jednostajnie do  $f$  oraz ciąg  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  z  $D$  spełnia*

**(i)**  $f_n(x_n) = 0$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  i **(ii)**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \in D$ ,

*to  $f(x) = 0$ .*

b) Czy zastępując w twierdzeniu „o zerach” założenie o ciągłości wszystkich funkcji  $f_n$  założeniem, że  $f$  jest ciągła, także uzyskamy twierdzenie (tzn. zdanie prawdziwe)?

c) Czy zastępując w twierdzeniu „o zerach” zbieżność jednostajną przez punktową, także uzyskamy twierdzenie?

**Zadanie 3.** Zbadaj, czy ciągi zadane poniższymi wzorami (z indeksem  $n$ ) mają granice.

Jeśli tak — znajdź je:

a)  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+n},$

b)  $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+n},$

c)  $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^k.$

**Zadanie 4.** Niech  $M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 5\}$  oraz niech  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją zadaną wzorem  $f(x, y, z) = 4x - 3y - 6z$ .

a) Czy  $f(M)$  posiada element największy?

b) Znajdź  $\sup f(M)$ .