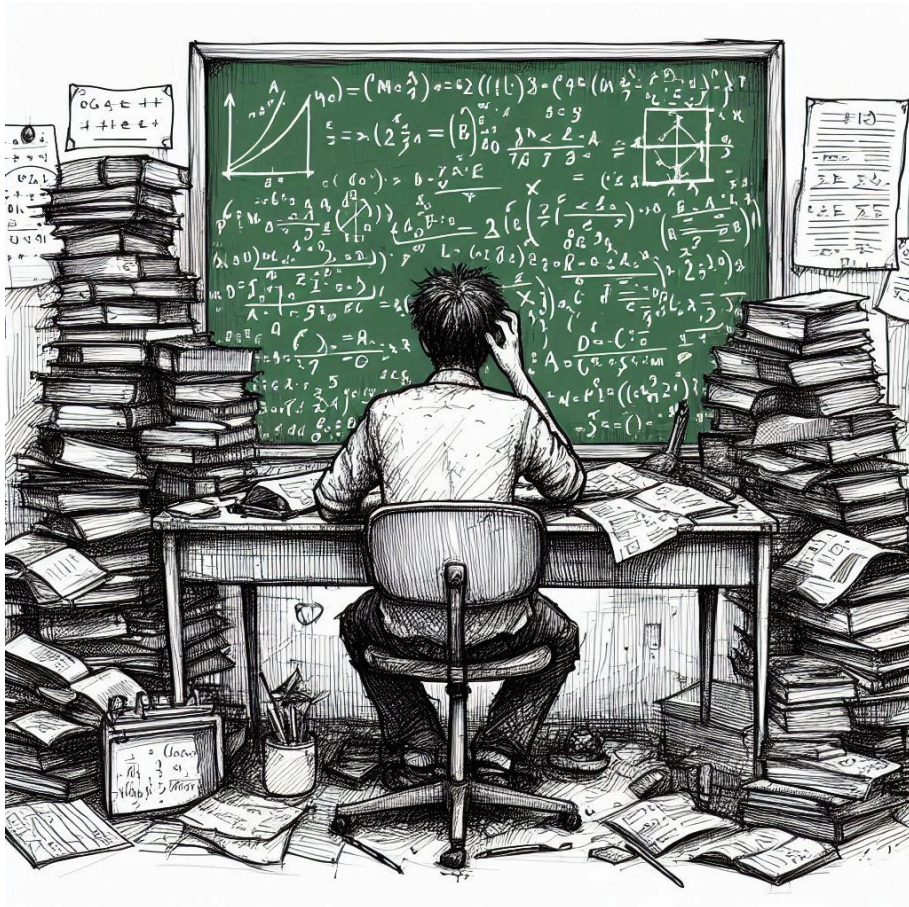


# Analiza Matematyczna I



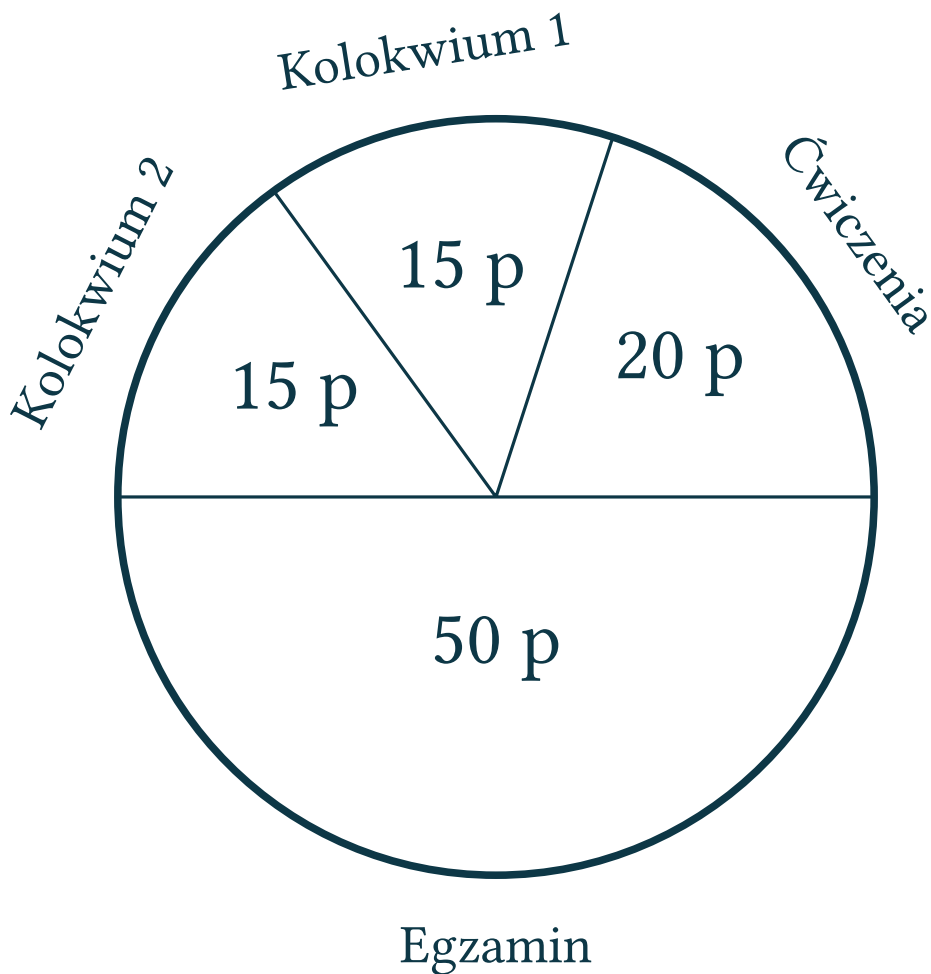
## Pogadanka wstępna

4 października 2024

Michał Miśkiewicz

# Zaliczenie przedmiotu

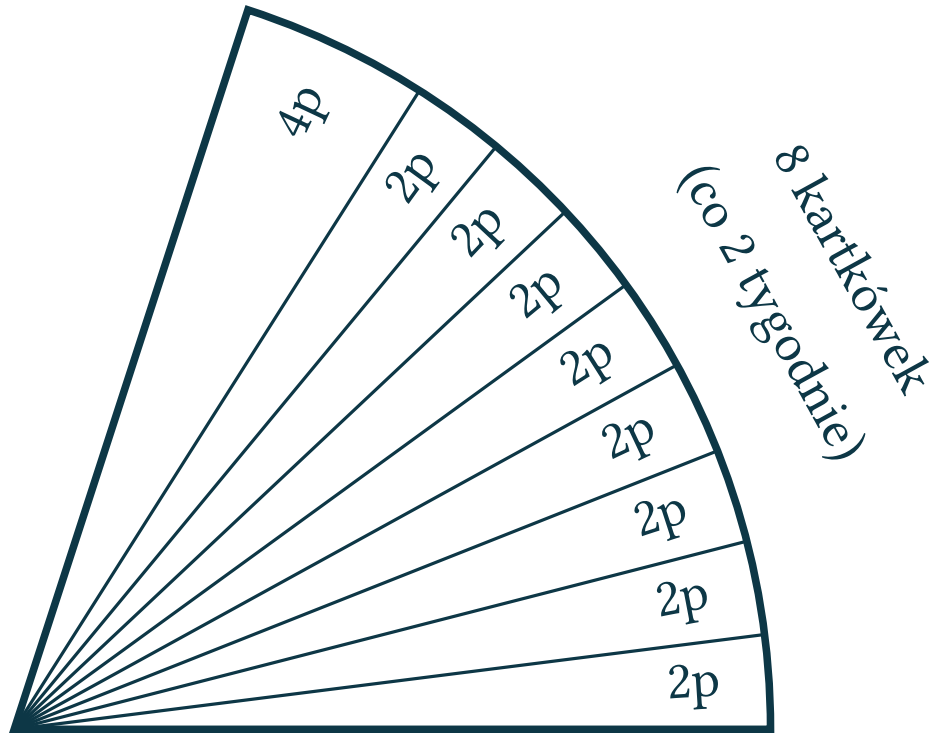
---



# Zaliczenie przedmiotu

---

Ocena za aktywność



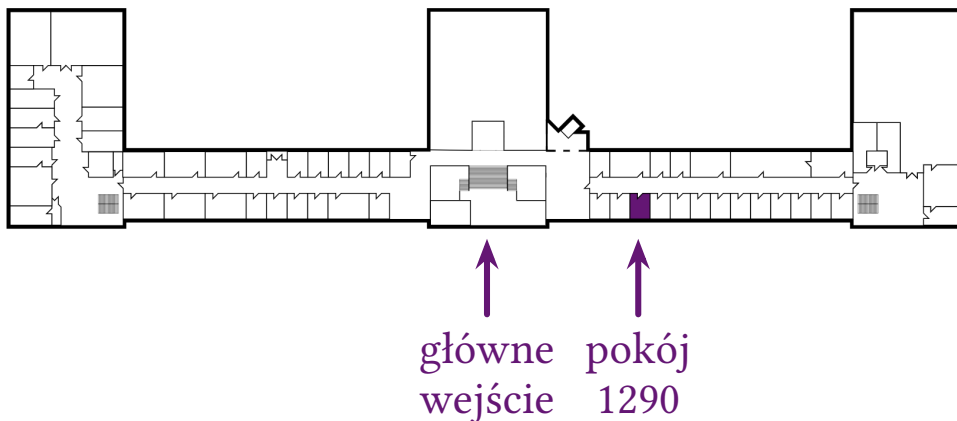
# Jak się ze mną skontaktować?

---

- ▶ E-mail: [m.miskiewicz@mimuw.edu.pl](mailto:m.miskiewicz@mimuw.edu.pl)
- ▶ Strona WWW: [mimuw.edu.pl/~mis](http://mimuw.edu.pl/~mis)
- ▶ Kurs na Moodle? to się okaże
- ▶ Konsultacje: **poniedziałki 13:00–14:30** (do potwierdzenia)

Wydział MIM przy **Banacha 2**, pokój **1290**

- najlepiej uprzedzić
- należy zignorować tabliczkę z nazwiskiem



# Co to jest analiza matematyczna?

---

*„Matematyka to zdrowy rozsądek na sterydach”*

(autor nieznany)

- + Jest bardzo mało do zapamiętania
- Jest bardzo dużo do zrozumienia
- Nauka na ostatnią chwilę słabo działa  
(dlatego mamy kartkówki i konsultacje)

# Pomoce domowe (do używania w czasie wolnym)

---



**Desmos** – kalkulator graficzny

Gorąco polecam!

# Pomoce domowe (do używania w czasie wolnym)

---



**Desmos** – kalkulator graficzny

Gorąco polecam!



**WolframAlpha** – obliczenia numeryczne i symboliczne

Potrafi dużo, ale trzeba wiedzieć, czego się chce

# Pomoce domowe (do używania w czasie wolnym)

---



**Desmos** – kalkulator graficzny

Gorąco polecam!



**WolframAlpha** – obliczenia numeryczne i symboliczne

Potrafi dużo, ale trzeba wiedzieć, czego się chce



**Claude, Chat GPT** i inne LLM – sprawy ogólne



**UWAGA!**

- ▶ Łatwo sobie samemu zaszkodzić
- ▶ Potrafią „zmyślać” i popełniać dowolne błędy w dowolnych miejscach
- ▶ Na plus: można nawet uzyskać intuicyjne wytłumaczenie



# Logika – elementy podchwytliwe I

---

Rozstrzygnijmy prawdziwość zdań:

Gdyby babcia miała wąsy, to by była dziadkiem

Formalnie: Babcia ma wąsy  $\implies$  Babcia jest dziadkiem

# Logika – elementy podchwytliwe I

---

Rozstrzygnijmy prawdziwość zdań:



Gdyby babcia miała wąsy, to by była dziadkiem

Formalnie: Babcia ma wąsy  $\implies$  Babcia jest dziadkiem

Implikacja z fałszywym poprzednikiem jest prawdziwa

| $P$ | $Q$ | $P \implies Q$ |
|-----|-----|----------------|
| ✓   | ✓   | ✓              |
| ✓   | ✗   | ✗              |
| ✗   | ✓   | ✓              |
| ✗   | ✗   | ✓              |

# Logika – elementy podchwytliwe I

---

Rozstrzygnijmy prawdziwość zdań:



Gdyby babcia miała wąsy, to by była dziadkiem

Formalnie: Babcia ma wąsy  $\implies$  Babcia jest dziadkiem

Implikacja z fałszywym poprzednikiem jest prawdziwa

| $P$ | $Q$ | $P \implies Q$ |
|-----|-----|----------------|
| ✓   | ✓   | ✓              |
| ✓   | ✗   | ✗              |
| ✗   | ✓   | ✓              |
| ✗   | ✗   | ✓              |

Wszyscy studenci mechaniki na wydziale MIM UW

otrzymują stypendium 10 000 zł na miesiąc.

Formalnie:  $\forall$  student mechaniki : stypendium 10 k/mies.

# Logika – elementy podchwytliwe I

---

Rozstrzygnijmy prawdziwość zdań:



Gdyby babcia miała wąsy, to by była dziadkiem

Formalnie: Babcia ma wąsy  $\implies$  Babcia jest dziadkiem

Implikacja z fałszywym poprzednikiem jest prawdziwa

| $P$ | $Q$ | $P \implies Q$ |
|-----|-----|----------------|
| ✓   | ✓   | ✓              |
| ✓   | ✗   | ✗              |
| ✗   | ✓   | ✓              |
| ✗   | ✗   | ✓              |



Wszyscy studenci mechaniki na wydziale MIM UW

otrzymują stypendium 10 000 zł na miesiąc.

Formalnie:  $\forall$  student mechaniki : stypendium 10 k/mies.

Jeśli rozważany zbiór jest pusty, to o jego elementach można powiedzieć wszystko

# Logika – elementy podchwytliwe I

Rozstrzygnijmy prawdziwość zdań:



Gdyby babcia miała wąsy, to by była dziadkiem

Formalnie: Babcia ma wąsy  $\implies$  Babcia jest dziadkiem

Implikacja z fałszywym poprzednikiem jest prawdziwa

| $P$ | $Q$ | $P \implies Q$ |
|-----|-----|----------------|
| ✓   | ✓   | ✓              |
| ✓   | ✗   | ✗              |
| ✗   | ✓   | ✓              |
| ✗   | ✗   | ✓              |



Wszyscy studenci mechaniki na wydziale MIM UW

otrzymują stypendium 10 000 zł na miesiąc.

Formalnie:  $\forall$  student mechaniki : stypendium 10 k/mies.

Jeśli rozważany zbiór jest pusty, to o jego elementach można powiedzieć wszystko

Któryś student mechaniki na wydziale MIM UW

otrzymuje stypendium 10 000 zł na miesiąc.

Formalnie:  $\exists$  student mechaniki : stypendium 10 k/mies.

# Logika – elementy podchwytliwe I

Rozstrzygnijmy prawdziwość zdań:



Gdyby babcia miała wąsy, to by była dziadkiem

Formalnie: Babcia ma wąsy  $\implies$  Babcia jest dziadkiem

Implikacja z fałszywym poprzednikiem jest prawdziwa

| $P$ | $Q$ | $P \implies Q$ |
|-----|-----|----------------|
| ✓   | ✓   | ✓              |
| ✓   | ✗   | ✗              |
| ✗   | ✓   | ✓              |
| ✗   | ✗   | ✓              |



Wszyscy studenci mechaniki na wydziale MIM UW  
otrzymują stypendium 10 000 zł na miesiąc.

Formalnie:  $\forall$  student mechaniki : stypendium 10 k/mies.

Jeśli rozważany zbiór jest pusty, to o jego elementach można powiedzieć wszystko



Któryś student mechaniki na wydziale MIM UW  
otrzymuje stypendium 10 000 zł na miesiąc.

Formalnie:  $\exists$  student mechaniki : stypendium 10 k/mies.

Taki student zwyczajnie nie istnieje

## Logika – elementy podchwytliwe II

---

*„Somewhere on this globe, every ten seconds,  
there is a woman giving birth to a child.  
She must be found and stopped.”*

Sam Levenson

## Logika – elementy podchwytliwe II

---

*„Somewhere on this globe, every ten seconds,  
there is a woman giving birth to a child.  
She must be found and stopped.”*

Sam Levenson

- ✓ W każdej z chwil 11:00:00, 11:00:10, ..., istnieje kobieta rodząca dziecko
- ✗ Istnieje kobieta, która rodzi dziecko o 11:00:00, 11:00:10, ...





## Logika – elementy podchwytliwe II

---

*„Somewhere on this globe, every ten seconds,  
there is a woman giving birth to a child.  
She must be found and stopped.”*

Sam Levenson

-  W każdej z chwil 11:00:00, 11:00:10, ..., istnieje kobieta rodząca dziecko  
Formalnie:  $\forall t = 11:00, \dots \exists \text{kobieta} : \text{rodzi dziecko w chwili } t$
-  Istnieje kobieta, która rodzi dziecko o 11:00:00, 11:00:10, ...  
Formalnie:  $\exists \text{kobieta} \forall t = 11:00, \dots : \text{rodzi dziecko w chwili } t$

**Zadanie I.1.** Rozstrzygnąć prawdziwość zdania:

Jeśli  $a \mid c$  i  $b \mid c$ , to  $a \cdot b \mid c$ .

**Zadanie I.1.** Rozstrzygnąć prawdziwość zdania:

Jeśli  $a \mid c$  i  $b \mid c$ , to  $a \cdot b \mid c$ .

*Tak naprawdę:*

**Dla dowolnych** liczb całkowitych  $a, b, c$ , jeśli  $a \mid c$  i  $b \mid c$ , to  $a \cdot b \mid c$ .

Formalnie:  $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a \mid c \wedge b \mid c \implies ab \mid c)$

*(nie żebyśmy tego potrzebowali)*

**Zadanie I.1.** Rozstrzygnąć prawdziwość zdania:

Jeśli  $a \mid c$  i  $b \mid c$ , to  $a \cdot b \mid c$ .

*Tak naprawdę:*

**Dla dowolnych** liczb całkowitych  $a, b, c$ , jeśli  $a \mid c$  i  $b \mid c$ , to  $a \cdot b \mid c$ .

Formalnie:  $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a \mid c \wedge b \mid c \implies ab \mid c)$

*(nie żebyśmy tego potrzebowali)*

 Wystarczy wskazać kontrprzykład:

$6 \mid 30$  i  $10 \mid 30$ , ale  $60 \nmid 30$       ( $a = 6, b = 10, c = 30$ )

Czy da się prościej?

**Zadanie.** Sformułować negację zdania:

Każdy, kto przyjdzie na konsultacje, dostanie cukierka.

**Zadanie.** Sformułować negację zdania:

Każdy, kto przyjdzie na konsultacje, dostanie cukierka.

Na konsultacjach pojawi się ktoś, kto nie dostanie cukierka.

**Zadanie.** Sformułować negację zdania:

Każdy, kto przyjdzie na konsultacje, dostanie cukierka.

Formalnie:  $\forall$  student : (obecność na konsultacjach  $\implies$  cukierek)

Na konsultacjach pojawi się ktoś, kto nie dostanie cukierka.

Formalnie:  $\exists$  student : (obecność na konsultacjach  $\wedge$  brak cukierka)

**Zadanie.** Sformułować negację zdania:

Każdy, kto przyjdzie na konsultacje, dostanie cukierka.

Formalnie:  $\forall$  student : (obecność na konsultacjach  $\implies$  cukierek)

Na konsultacjach pojawi się ktoś, kto nie dostanie cukierka.

Formalnie:  $\exists$  student : (obecność na konsultacjach  $\wedge$  brak cukierka)

Każdy problem ma jakieś rozwiązanie.



**Zadanie.** Sformułować negację zdania:

Każdy, kto przyjdzie na konsultacje, dostanie cukierka.

Formalnie:  $\forall$  student : (obecność na konsultacjach  $\implies$  cukierek)

Na konsultacjach pojawi się ktoś, kto nie dostanie cukierka.

Formalnie:  $\exists$  student : (obecność na konsultacjach  $\wedge$  brak cukierka)

Każdy problem ma jakieś rozwiązanie.

Istnieje problem nierozwiązywalny.

**Zadanie.** Sformułować negację zdania:

Każdy, kto przyjdzie na konsultacje, dostanie cukierka.

Formalnie:  $\forall$  student : (obecność na konsultacjach  $\implies$  cukierek)

Na konsultacjach pojawi się ktoś, kto nie dostanie cukierka.

Formalnie:  $\exists$  student : (obecność na konsultacjach  $\wedge$  brak cukierka)

Każdy problem ma jakieś rozwiązanie.

Formalnie:  $\forall$  problem  $P \exists$  sposób  $S$  :  $S$  rozwiązuje  $P$

Istnieje problem nierozwiązywalny.

Formalnie:  $\exists$  problem  $P \forall$  sposób  $S$  :  $S$  nie rozwiązuje  $P$

**Zadanie I.11.** Poniższa tabelka przedstawia niektóre wartości pewnej funkcji liniowej, ale z błędami.

|     |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y$ | 2 | 6 | 4 | 2 | 6 |

Czy możliwe jest, że:

co najmniej 4 wartości są poprawne?

co najmniej 3 wartości są poprawne?





dokładnie 2 wartości są poprawne?

żadna wartość nie jest poprawna?

**Zadanie I.11.** Poniższa tabelka przedstawia niektóre wartości pewnej funkcji liniowej, ale z błędami.

|     |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y$ | 2 | 6 | 4 | 2 | 6 |

Czy możliwe jest, że:

-  co najmniej 4 wartości są poprawne?
-  co najmniej 3 wartości są poprawne?
-  dokładnie 2 wartości są poprawne?
-  żadna wartość nie jest poprawna?

**Zadanie I.13.** Czy nierówności  $y < x$  oraz  $y/x < 1$  zadają ten sam zbiór na płaszczyźnie?

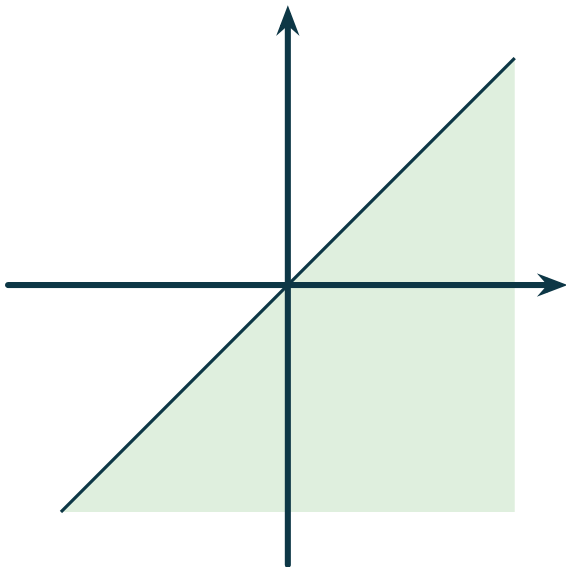
**Zadanie I.13.** Czy nierówności  $y < x$  oraz  $y/x < 1$  zadają ten sam zbiór na płaszczyźnie?

**×** Nie, bo punkt  $(-1, 2)$  spełnia tylko drugą z nierówności.  
A graficznie?

**Zadanie I.13.** Czy nierówności  $y < x$  oraz  $y/x < 1$  zadają ten sam zbiór na płaszczyźnie?

✘ Nie, bo punkt  $(-1, 2)$  spełnia tylko drugą z nierówności.  
A graficznie?

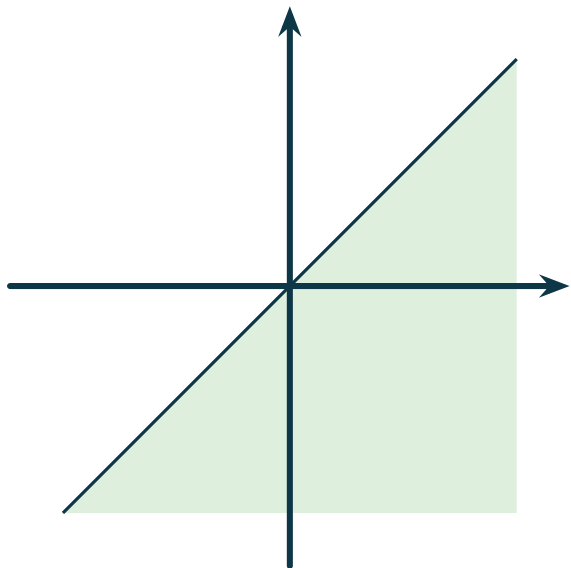
$$\{(x, y) : y < x\}$$



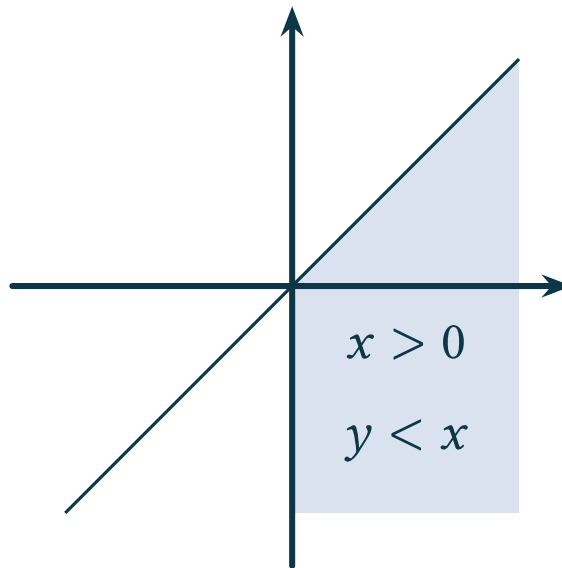
**Zadanie I.13.** Czy nierówności  $y < x$  oraz  $y/x < 1$  zadają ten sam zbiór na płaszczyźnie?

**✗** Nie, bo punkt  $(-1, 2)$  spełnia tylko drugą z nierówności.  
A graficznie?

$$\{(x, y) : y < x\}$$



$$\{(x, y) : y/x < 1\}$$

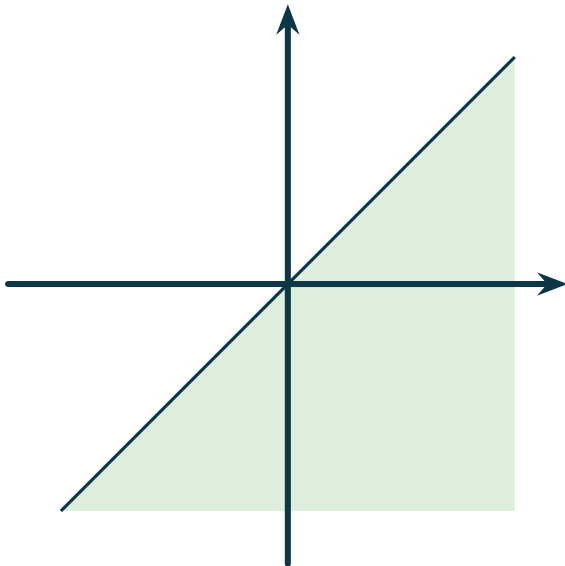




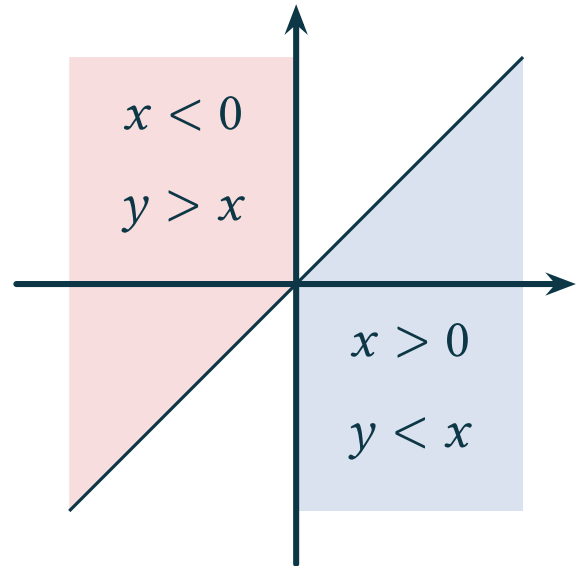
**Zadanie I.13.** Czy nierówności  $y < x$  oraz  $y/x < 1$  zadają ten sam zbiór na płaszczyźnie?

**✘** Nie, bo punkt  $(-1, 2)$  spełnia tylko drugą z nierówności.  
A graficznie?

$$\{(x, y) : y < x\}$$



$$\{(x, y) : y/x < 1\}$$



**Zadanie I.19.** Jaki ciąg otrzymamy, jeśli zapiszemy początkową cyfrę każdej z potęg dwójki?

**Zadanie I.19.** Jaki ciąg otrzymamy, jeśli zapiszemy początkową cyfrę każdej z potęg dwójki?

|               |                      |                        |
|---------------|----------------------|------------------------|
| <b>1</b>      | <b>1</b> 048576      | <b>1</b> 099511627776  |
| <b>2</b>      | <b>2</b> 097152      | <b>2</b> 199023255552  |
| <b>4</b>      | <b>4</b> 194304      | <b>4</b> 398046511104  |
| <b>8</b>      | <b>8</b> 388608      | <b>8</b> 796093022208  |
| <b>16</b>     | <b>1</b> 6777216     | <b>1</b> 7592186044416 |
| <b>32</b>     | <b>3</b> 3554432     | <b>3</b> 5184372088832 |
| <b>64</b>     | <b>6</b> 7108864     |                        |
| <b>128</b>    | <b>1</b> 34217728    |                        |
| <b>256</b>    | <b>2</b> 68435456    |                        |
| <b>512</b>    | <b>5</b> 36870912    |                        |
| <b>1024</b>   | <b>1</b> 073741824   |                        |
| <b>2048</b>   | <b>2</b> 147483648   |                        |
| <b>4096</b>   | <b>4</b> 294967296   |                        |
| <b>8192</b>   | <b>8</b> 589934592   |                        |
| <b>16384</b>  | <b>1</b> 7179869184  |                        |
| <b>32768</b>  | <b>3</b> 4359738368  |                        |
| <b>65536</b>  | <b>6</b> 8719476736  |                        |
| <b>131072</b> | <b>1</b> 37438953472 |                        |
| <b>262144</b> | <b>2</b> 74877906944 |                        |
| <b>524288</b> | <b>5</b> 49755813888 |                        |

**Zadanie I.19.** Jaki ciąg otrzymamy, jeśli zapiszemy początkową cyfrę każdej z potęg dwójki?

|        |              |                |
|--------|--------------|----------------|
| 1      | 1048576      | 1099511627776  |
| 2      | 2097152      | 2199023255552  |
| 4      | 4194304      | 4398046511104  |
| 8      | 8388608      | 8796093022208  |
| 16     | 16777216     | 17592186044416 |
| 32     | 33554432     | 35184372088832 |
| 64     | 67108864     |                |
| 128    | 134217728    |                |
| 256    | 268435456    |                |
| 512    | 536870912    |                |
| 1024   | 1073741824   |                |
| 2048   | 2147483648   |                |
| 4096   | 4294967296   |                |
| 8192   | 8589934592   |                |
| 16384  | 17179869184  |                |
| 32768  | 34359738368  |                |
| 65536  | 68719476736  |                |
| 131072 | 137438953472 |                |
| 262144 | 274877906944 |                |
| 524288 | 549755813888 |                |

**1248136125...**

**Zadanie I.19.** Jaki ciąg otrzymamy, jeśli zapiszemy początkową cyfrę każdej z potęg dwójki?

|        |              |                  |
|--------|--------------|------------------|
| 1      | 1048576      | 1099511627776    |
| 2      | 2097152      | 2199023255552    |
| 4      | 4194304      | 4398046511104    |
| 8      | 8388608      | 8796093022208    |
| 16     | 16777216     | 17592186044416   |
| 32     | 33554432     | 35184372088832   |
| 64     | 67108864     | 70368744177664   |
| 128    | 134217728    | 140737488355328  |
| 256    | 268435456    | 281474976710656  |
| 512    | 536870912    | 562949953421312  |
| 1024   | 1073741824   | 1125899906842624 |
| 2048   | 2147483648   | 2251799813685248 |
| 4096   | 4294967296   | 4503599627370496 |
| 8192   | 8589934592   | 9007199254740992 |
| 16384  | 17179869184  |                  |
| 32768  | 34359738368  |                  |
| 65536  | 68719476736  |                  |
| 131072 | 137438953472 |                  |
| 262144 | 274877906944 |                  |
| 524288 | 549755813888 |                  |

~~1248136125...~~

to jest przykład

„indukcji fizycznej”

**Zadanie I.19.** Jaki ciąg otrzymamy, jeśli zapiszemy początkową cyfrę każdej z potęg dwójki?

|        |              |                  |
|--------|--------------|------------------|
| 1      | 1048576      | 1099511627776    |
| 2      | 2097152      | 2199023255552    |
| 4      | 4194304      | 4398046511104    |
| 8      | 8388608      | 8796093022208    |
| 16     | 16777216     | 17592186044416   |
| 32     | 33554432     | 35184372088832   |
| 64     | 67108864     | 70368744177664   |
| 128    | 134217728    | 140737488355328  |
| 256    | 268435456    | 281474976710656  |
| 512    | 536870912    | 562949953421312  |
| 1024   | 1073741824   | 1125899906842624 |
| 2048   | 2147483648   | 2251799813685248 |
| 4096   | 4294967296   | 4503599627370496 |
| 8192   | 8589934592   | 9007199254740992 |
| 16384  | 17179869184  |                  |
| 32768  | 34359738368  |                  |
| 65536  | 68719476736  |                  |
| 131072 | 137438953472 |                  |
| 262144 | 274877906944 |                  |
| 524288 | 549755813888 |                  |

~~1248136125...~~

to jest przykład  
„indukcji fizycznej”

a taki jest faktyczny  
rozkład częstości cyfr:

