AM I.2

VII seria zadań domowych

do oddania na początku ćwiczeń 30 kwietnia

1. Znaleźć rozwinięcia w szeregi potęgowe:

(a) funkcji $\ln(x)$ wokół $x_0 = 5$; (b) funkcji $\sin(t)$ wokół $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

2. Wykazać tożsamość

$$\frac{1}{1 \cdot (2n+1)} + \frac{1}{3 \cdot (2n-1)} + \cdots + \frac{1}{(2n+1) \cdot 1} = \frac{1}{n+1}\Big(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n+1}\Big),$$

wyprowadzając rozwinięcie w szereg potęgowy funkcji $f(x) = \operatorname{arc\,tg}^2(x)$ na dwa różne sposoby. (Wyprowadzenie tej tożsamości w inny sposób nie będzie punktowane.)

3 (Podpunkty (a) i (b) warte są po $\frac{1}{4}$ punktu, zaś podpunkt (c) wart jest $\frac{1}{2}$ punktu)**.**
Ustalmy $a \in \mathbb{R}$. Przypomnijmy, że $\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$.
(a) Wykazać, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$ jest zbieżny dla $|x| < 1$ oraz że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

jest różniczkowalna na $(-1, 1)$ i spełnia na tym przedziale równanie różniczkowe $(1 + x)f'(x) = af(x)$.
(b) Wykazać, że $(1 + x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$ dla $|x| < 1$.
(c) Znaleźć rozwinięcie funkcji $\arcsin(x)$ w szereg potęgowy.

4. Niech $f(x) = \frac{x+1}{(x-3)(x^2-2x+5)}$. Obliczyć $f^{(100)}(1)$.

5. Załóżmy, że w pewnym otoczeniu zera funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rozwija się w szereg potęgowy oraz spełnia równanie $(1 - x^2)f''(x) = 2 + xf'(x)$, a ponadto $f(0) = 0 = f'(0)$. Wyznaczyć współczynniki rozwinięcia funkcji f w szereg potęgowy wokół 0 (i zapisać je możliwie zwięzłym wzorem). Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego, w który f rozwija się wokół zera..

6 (Zadanie dodatkowe dla grupy 5, warte 1 dodatkowy punkt. Rozwiązania tego zadania proszę oddawać na oddzielnej kartce. **Termin oddania: 28 maja**).
Promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{2^n}$ to 1. Wykazać, że dla każdego z ze zbioru $\{\cos(\alpha) + i\sin(\alpha) : \alpha = k\pi/2^l, k, l \in \mathbb{N}\}$ szereg ten jest rozbieżny oraz wskazać taki gęsty podzbiór A okręgu jednostkowego, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{2^n}$ jest zbieżny dla każdego $z \in A$. (Należy wykazać, że wskazany w rozwiązaniu zbiór A ma wszystkie opisane własności.)