1 Pochodna – wiadomości wstępne

Podstawowe własności.

$$(f+g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad (1/g)' = -g'/g^2, \quad (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

Ponadto $\exp' = \exp$ i w konsekwencji $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.

Dalsze własności (wyprowadzone z tych wyżej).

$$(f/g)' = (f'g - fg')/g^2, \quad (f^{-1})' = 1/(f' \circ f^{-1}), \quad \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k x^k\Big)' = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

Zadanie 1.1. Z faktu $\exp' = \exp$ wyprowadzić, że pochodną logarytmu naturalnego $\ln$ jest funkcja $1/x$.

Zadanie 1.2. Wyprowadzić wzory

$$\sin' = \cos = \sqrt{1-\sin^2}, \qquad \operatorname{tg}' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \operatorname{tg}^2$$

na przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Wywnioskować, że

$$\arcsin' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \operatorname{arc\,tg}' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Zadanie 1.3. Wyznaczyć pochodne następujących funkcji:

(a) a^x na $\mathbb{R}$ ($a > 0$ – stała)

(b) x^a na $\mathbb{R}^+$ ($a \in \mathbb{R}$ – stała)

(c) x^x na $\mathbb{R}^+$

Zadanie 1.4. Obliczyć pochodne funkcji $x\sqrt{9 + \sin(\operatorname{tg} x)}$ oraz $\sin(x\sqrt{4 + \sin(\operatorname{tg} x)})$ w punkcie $x = 0$.
Wskazówka. Po prostu skorzystać z definicji.

Zadanie 1.5. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(\frac{1}{x}) & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases}$$

jest

(a) ciągła na $\mathbb{R}$?

(b) różniczkowalna na $\mathbb{R}$?

(c) ma ciągłą pochodną na $\mathbb{R}$?

Zadanie 1.6. Przy założeniu, że funkcja f jest różniczkowalna w a, wyznaczyć granicę

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

Czy z istnienia tej granicy wynika istnienie $f'(a)$?

Zadanie 1.7. Załóżmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna. W których punktach różniczkowalna jest funkcja $|f|$?

Zadanie 1.8. Niech $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k$ będzie funkcją wielomianową.

(a) Wyznaczyć pochodne f kolejnych rzędów w punkcie $x = 0$: $f^{(k)}(0) = k!a_k$.

(b) Wywnioskować, że

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Dlaczego można sumować aż do nieskończoności?

(c) Uzasadnić wzór

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k,$$

w którym 0 zastąpiono dowolnym punktem $a \in \mathbb{R}$.

2 Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej

i jego konsekwencje

Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej Jeśli f jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna w (a,b), to w pewnym punkcie $x \in (a,b)$ zachodzi równość $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Zadanie 2.1. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Czy prawdą jest, że muszą istnieć punkty $a < 0 < b$, dla których $f'(0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$?

Zadanie 2.2. Udowodnić, że jeśli funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ma pochodną stale równą zero, to jest stała.

Zadanie 2.3. Wykazać, że jeśli funkcja różniczkowalna $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia równanie różniczkowe $f'(x) = f(x)$ (dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$), to jest zadana wzorem $f(x) = ae^x$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$.

Wskazówka. Rozważyć pomocniczo funkcję $e^{-x}f(x)$.

Zadanie 2.4. Funkcja różniczkowalna $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ spełnia równanie $f'(x) = 1+(f(x))^2$ (dla wszystkich $x \in (a,b)$). Wykazać, że $b - a \leqslant \pi$.

Wskazówka. Rozważyć pomocniczo funkcję $\operatorname{arc\,tg}(f(x))$.

Zadanie 2.5. Dana jest dwukrotnie różniczkowalna funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca $f''(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wykazać, że jest to funkcja liniowa: istnieją takie $a, b \in \mathbb{R}$, że $f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 2.6. Dana jest funkcja ciągła $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ dwukrotnie różniczkowalna w $(0,2)$. Udowodnić, że jeśli $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, to $f''(x_0) = 0$ dla pewnego $x_0 \in (0,2)$.

Zadanie 2.7. Załóżmy, że funkcje ciągłe $f, g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w (a,b). Wykazać, że w pewnym punkcie $x \in (a,b)$ zachodzi równość

$$\det \begin{bmatrix} f(a) & f(b) & f'(x) \\ g(a) & g(b) & g'(x) \\ h(a) & h(b) & h'(x) \end{bmatrix} = 0.$$

Wskazówka. Rozważyć funkcję $u(x) := \begin{bmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ h(a) & h(b) & h(x) \end{bmatrix}$.

Zadanie 2.8. Wyprowadzić z poprzedniego zadania (przy tych samych założeniach) twierdzenie Cauchy'ego:

$$\exists\, x \in (a,b) \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \qquad \text{(o ile } g(b) \neq g(a)\text{)}$$

oraz twierdzenie Lagrange'a:

$$\exists\, x \in (a,b) \quad f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

3 Badanie przebiegu funkcji

Pochodna a zmienność funkcji. Niech f będzie funkcją różniczkowalną. Wtedy

- f ma lokalne ekstremum w $x_0 \implies f'(x_0) = 0$;
- f jest niemalejąca $\iff f' \geqslant 0$;
- f jest rosnąca $\iff f' \geqslant 0$ oraz f' nie zeruje się na żadnym odcinku;
- f jest wypukła $\iff f'$ jest niemalejąca.

Analogicznie można scharakteryzować, kiedy f jest nierosnąca, malejąca czy wklęsła.

Zadanie 3.1. Znaleźć kresy górny i dolny funkcji

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\ln(x)}{x},$$

a jeśli są one przyjmowane, to określić, w których punktach. Następnie rozstrzygnąć, która z liczb jest większa: π^e czy e^π.

Zadanie 3.2. Wykazać, że dla $0 \leqslant x < 1$ oraz $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\ln(1-x) \leqslant -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}.$$

Wskazówka. Zbadać pochodną różnicy tych dwóch funkcji.

Zadanie 3.3. Udowodnić, że funkcja $\operatorname{arc\,tg}$ spełnia nierówność Lipschitza ze stałą 1:

$$|\operatorname{arc\,tg}(x) - \operatorname{arc\,tg}(y)| \leqslant |x-y| \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 3.4. Uzasadnić nierówności

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{5} < \operatorname{arc\,tg} 2 < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

Wskazówka. $\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$

Zadanie 3.5. (a) Wykazać, że $f(x) = x + \sin x$ jest funkcją (ściśle) rosnącą na $\mathbb{R}$.

(b) Wywnioskować, że $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest bijekcją, więc istnieje funkcja odwrotna $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(c) Dla jakich $y \in \mathbb{R}$ istnieje (skończona) pochodna $(f^{-1})'(y)$?

Zadanie 3.6. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest zadana wzorem $f(x) = x + \sin(2x)$.

(a) Wyznaczyć jej punkty krytyczne, czyli punkty zerowania się pochodnej.

(b) Czy f posiada minimum lub maksimum globalne?

(c) Czy f posiada minimum lub maksimum lokalne?

(d) Naszkicować wykres f' oraz f.

Zadanie 3.7. Niech $0 < \varepsilon < 1$. Wykazać, że istnieje dokładnie jedna funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca równanie

$$f(x) - \varepsilon \sin(f(x)) = x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Uzasadnić, że jest ona różniczkowalna.

Zadanie 3.8. Znaleźć minimum objętości stożków opisanych na kuli o promieniu r.

Zadanie 3.9. Dwukrotnie różniczkowalna funkcja $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ spełnia $|f''(x)| \leqslant M$ dla $x \in (0,1)$. Wykazać, że spełnia ona warunek Lipschitza $|f(x)-f(y)| \leqslant N$ z pewną stałą N.

Zadanie 3.10. Dana jest funkcja

$$f\colon (0, \tfrac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\sin(2x)}.$$

Wykazać, że f osiąga swój kres dolny w dokładnie jednym punkcie $u \in (0, \frac{\pi}{2})$, podobnie swój kres górny w dokładnie jednym punkcie v. Wyznaczyć sumę $u + v$.

Zadanie 3.11. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = \sqrt[5]{x-2}\,\sqrt[9]{x-7}.$$

Zadanie 3.12. Wykazać, że równania

(a) $x^{13} + 7x^3 = 5$,

(b) $3^x + 4^x = 5^x$

mają dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

Zadanie 3.13. Znaleźć kresy funkcji $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ na przedziale $[-4, 4]$.

Zadanie 3.14. Na elipsie zadanej równaniem $x^2 + 2y^2 = 1$ znaleźć punkt leżący najbliżej prostej $x + y = 2$.

4 Funkcje wypukłe

Twierdzenie. Funkcja różniczkowalna f jest na danym przedziale wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest niemalejąca (a ściśle wypukła, gdy f' rosnąca).

Nierówność Jensena. Jeśli $f\colon D \to \mathbb{R}$ jest wypukła, $x_1, \ldots, x_n \in D$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$ oraz $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, to

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n).$$

Zadanie 4.1. Znaleźć punkty przegięcia oraz wskazać przedziały wypukłości i wklęsłości funkcji $\ln(1+x^2)$.

Zadanie 4.2. Niech g będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną na przedziale I, zaś f funkcją dwukrotnie różniczkowalną na $g(I)$.

(a) Wykazać, że jeśli f jest wypukła i rosnąca, a g wypukła, to $f \circ g$ jest wypukła.

(b) Co wystarczy założyć o funkcjach wklęsłych f, g, by mieć pewność, że ich złożenie jest funkcją wklęsłą?

Uwaga. Dwukrotna różniczkowalność może pomóc w rozwiązaniu, ale tak naprawdę nie jest potrzebna.

Zadanie 4.3. Funkcje $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ i $g\colon [b,c) \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne i wypukłe, a funkcja

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in (a,b], \\ g(x) & \text{dla } x \in [b,c) \end{cases}$$

jest różniczkowalna w b. Wykazać, że h jest wypukła na (a,c). Podać też przykład świadczący o tym, że założenia o różniczkowalności h w punkcie b nie można pominąć.

Zadanie 4.4. Wykazać, że jeśli funkcja f jest ściśle wypukła i różniczkowalna na pewnym przedziale, to zachodzi jedna z poniższych możliwości:

- f jest ściśle monotoniczna i f' się nie zeruje;
- f' zeruje się w dokładnie jednym punkcie i funkcja f ma w tym punkcie minimum.

Zadanie 4.5. Dla $0 < x \leqslant y$ wyprowadzić nierówności

$$e^y \geqslant e^x + e^x(y-x), \qquad \sqrt{y} \leqslant \sqrt{x} + \frac{y-x}{2\sqrt{x}}, \qquad \ln y \leqslant \ln x + \frac{y-x}{x}.$$

Wskazówka. Wykres funkcji wypukłej leży nad styczną, a funkcji wklęsłej – pod.

Zadanie 4.6. Z nierówności Jensena (dla funkcji $\ln x$ i x^p) wyprowadzić klasyczne nierówności między średnimi dla $x_1, \ldots, x_n > 0$ oraz $p \geqslant 1$:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \leqslant \left(\frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n}\right)^{1/p}$$

Zadanie 4.7. Niech α, β, γ oznaczają kąty pewnego trójkąta. Dowieść, że wtedy:

(a) $\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8}$;

(b) $\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$;

(c) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma \geqslant 9$ (dla trójkąta ostrokątnego)

(d) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{3\sqrt{3}}$ (dla trójkąta ostrokątnego)

Dla jakich trójkątów w powyższych nierównościach zachodzi równość?

Zadanie 4.8. Wykazać, że dla $x, y, z > 0$ zachodzi nierówność

$$x\ln x + 2y\ln y + 3z\ln z + (x+2y+3z)\ln 6 \geqslant (x+2y+3z)\ln(x+2y+3z).$$

Zadanie 4.9. (kolokwium AM I.2, 2010) Udowodnić, że jeśli liczby a, b, c są nieujemne, to

$$a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{2(a+b+c)(ab+bc+ca)}.$$

Wskazówka. W przypadku $a+b+c=1$ zastosować nierówność Jensena dla funkcji $f(x) = \sqrt{1-x}$.

Zadanie 4.10. Wyznaczyć wszystkie wartości, jakie może przyjmować wyrażenie

$$\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}$$

dla dodatnich liczb $a,b,c,d>0$.

Zadanie 4.11. Korzystając z wypukłości funkcji tangens na odpowiednim przedziale, dowieść, że spośród n-kątów opisanych na danym okręg najmniejszy obwód i zarazem najmniejsze pole ma n-kąt foremny.
Wywnioskować, że wśród wielokątów opisanych na okręgu o promieniu r kres dolny obwodów wynosi $2\pi r$, a kres dolny pól πr^2.

Zadanie 4.12. Korzystając z wklęsłości funkcji sinus na odpowiednim przedziale, dowieść, że spośród n-kątów wpisanych w dany okręg największy obwód i zarazem największe pole ma n-kąt foremny.
Wywnioskować, że wśród wielokątów wpisanych w okrąg o promieniu r kres górny obwodów wynosi $2\pi r$, a kres górny pól πr^2.

Zadanie 4.13. (II etap OM, 2024) Liczby dodatnie a,b,c,x,y,z spełniają równość $5a+4b+3c=5x+4y+3z$. Udowodnić, że

$$\frac{a^5}{x^4}+\frac{b^4}{y^3}+\frac{c^3}{z^2}\geqslant x+y+z.$$

Wskazówka. Funkcje $a\mapsto\frac{a^5}{x^4}$, $b\mapsto\frac{b^4}{y^3}$, $c\mapsto\frac{c^3}{z^2}$ są wypukłe.

Zadanie 4.14. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{n}k\sqrt{\binom{n}{k}}<\sqrt{n^3 2^{n-1}}.$$

Wskazówka. Nierówność Jensena dla funkcji $\sqrt{x}$.

5 Praca domowa – pochodne

Errata (2024-03-07). W Zadaniu 5.2 poprawiono założenia: $f(0)$ jest równe zero, natomiast $f'(0)$ a) jest lub b) nie jest równe zero.

Termin. Rozwiązania będą zbierane podczas zajęć we wtorek 12 marca. Każde zadanie powinno być napisane na oddzielnej kartce i podpisane czytelnie (najlepiej drukowanymi literami) imieniem i nazwiskiem. Fakty poznane na wykładzie i ćwiczeniach można i należy uznać za znane.

Zadanie 5.1. (2p) Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = x^3 - (\pi/2)^3 + 3\sin x$.

(a) Udowodnić, że funkcja ta jest bijekcją, a jej odwrotność $g := f^{-1}$ jest wszędzie różniczkowalna.

(b) Wyznaczyć wartość $g'(3)$.

Zadanie 5.2. (1p) Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w zerze oraz $f(0) = 0$. Wykazać, że

(a) jeśli $f'(0) = 0$, to funkcja $|f|$ jest różniczkowalna w zerze oraz $|f|'(0) = 0$;

(b) jeśli $f'(0) \neq 0$, to funkcja $|f|$ nie jest różniczkowalna w zerze.

Zadanie 5.3. (1p) Wykazać nierówność

$$\ln(x) \leqslant \frac{x^2 - 1}{2} \qquad \text{dla } x > 0.$$

6 Praca domowa – wypukłość

Termin. Rozwiązania będą zbierane podczas zajęć we wtorek 19 marca. Każde zadanie powinno być napisane na oddzielnej kartce i podpisane czytelnie (najlepiej drukowanymi literami) imieniem i nazwiskiem. Fakty poznane na wykładzie i ćwiczeniach można i należy uznać za znane.

Zadanie 6.1. Niech g będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną na przedziale I, zaś f funkcją dwukrotnie różniczkowalną na $g(I)$. Wykazać, że jeśli f jest wypukła i rosnąca, a g wypukła, to $f \circ g$ jest wypukła.

Zadanie 6.2. Niech α, β, γ oznaczają kąty pewnego trójkąta ostrokątnego. Dowieść, że wtedy

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Dla jakich trójkątów zachodzi równość?

Zadanie 6.3. Sprawdzić, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = e^{-|x-2|}(x^2+2)$ jest wypukła na przedziałach $(-\infty, 2]$ oraz $[2, \infty)$, ale nie jest wypukła na $\mathbb{R}$.

Zadanie 6.4. Zbadać zmienność funkcji $g\colon (-\infty, 2) \to \mathbb{R}$ danej wzorem $g(x) = \frac{x^4}{8-x^3}$: podać jej kresy, przedziały monotoniczności oraz (maksymalne) przedziały wypukłości/wklęsłości.

7 Wzór Taylora

Wzorem Taylora możemy nazwać wzór

$$\begin{aligned} & f(x) = T_n^a f(x) + R_n^a f(x), \\ \text{gdzie} \quad & T_n^a f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k && \text{– „wielomian Taylora”}, \\ & R_n^a f(x) := f(x) - T_n^a f(x) && \text{– „reszta”}. \end{aligned}$$

Interesujące jest to, co (przy odpowiednich założeniach) można powiedzieć o reszcie:

- $R_n^a f(x) = o((x-a)^n)$, to znaczy $\dfrac{R_n^a f(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow{x \to a} 0$ (własność Peano);
- $R_n^a f(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ dla pewnego ξ pomiędzy a i x (postać Lagrange'a);
- $R_n^a f(x) = (x-a)^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{f^{(n+1)}(a + t(x-a))}{n!}(1-t)^n \, \mathrm{d}t$ (postać całkowa).

Zadanie 7.1. Sprawdzić, że jeśli f jest wielomianem stopnia $\leqslant n$, to $T_n^a f \equiv f$ niezależnie od $a \in \mathbb{R}$ (por. Zadanie 1.8).

Zadanie 7.2. Jeśli f jest różniczkowalna n-krotnie, to $(T_n^a f)'(x) = (T_{n-1}^a f')(x)$.

Zadanie 7.3. Załóżmy, że f jest $(n+1)$-krotnie różniczkowalna. Wyprowadzić wzór $\partial_a (T_n^a f(x)) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n$ i wywnioskować z niego postać Lagrange'a reszty.
Uwaga. Symbol ∂_a oznacza *pochodną cząstkową względem zmiennej* a, czyli po prostu pochodną funkcji $a \mapsto T_n^a f(x)$ (dla ustalonego x).

Zadanie 7.4. Uzasadnić, że wielomian Taylora jest jedynym wielomianem stopnia $\leqslant n$, dla którego reszta posiada własność Peano. Innymi słowy, jeśli $f(x) - p(x) = o((x-a)^n)$ dla pewnego wielomianu p stopnia $\leqslant n$, to $p \equiv T_n^a f$.

Zadanie 7.5. Dla funkcji $f(x) = (\cos x + \sin x)e^x$ wyznaczyć wielomian Taylora $T_2^0 f(x)$ na dwa sposoby:

- wyznaczając pochodne $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ i podstawiając do wzoru;
- korzystając z rozwinięć

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad \sin x = x + o(x^2), \quad e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x + o(x^2).$$

Zadanie 7.6. Wykazać, że dla $x \to 0$:

(a) $\ln x = o\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right)$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$;

(b) $x \sin \sqrt{x} = O(x^{3/2})$;

(c) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[8]{x}$.

Wyjaśnienie symboli. $f = o(g)$ oznacza zbieżność $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$, $f = O(g)$ oznacza ograniczoność $\frac{f(x)}{g(x)}$ na pewnym (nakłutym) otoczeniu $x = 0$, $f \sim g$ oznacza zbieżność $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$.

Zadanie 7.7. Jakiego rzędu względem x przy $x \to 0$ jest wyrażenie:

(a) $\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$?

(b) $\operatorname{tg} x - \sin x$?

Zadanie 7.8. Obliczyć pochodną rzędu 2023 i 2024 w zerze dla funkcji $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Zadanie 7.9. Wyznaczyć granice:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} \qquad \text{b)} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$$

$$\text{c)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2\sin x - 2\operatorname{tg} x}{x^5}\right) \qquad \text{d)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x + \ln(\sqrt{1+x^2} - x)}{x^3}$$

Zadanie 7.10. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}\cdot \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Zadanie 7.11. Obliczyć

(a) e z dokładnością do 10^{-9};

(b) $\sqrt{5}$ z dokładnością do 10^{-3}.

Zadanie 7.12. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^2 spełniającą $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$. Wykazać, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \left(f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = e^{-x^2/2}.$$

Uwaga. Ten fakt jest kluczowym składnikiem dowodu centralnego twierdzenia granicznego, które mówi (w dużym uproszczeniu) o uniwersalności rozkładu normalnego.

Zadanie 7.13. Wyznaczyć granicę $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{8x^3 + 6x^2} - ax$ w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$.

Zadanie 7.14. (funkcja niebędąca swoim szeregiem Taylora) Rozważmy funkcję

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Wykazać, że jest to funkcja gładka (tzn. różniczkowalna dowolnie wiele razy).

Zadanie 7.15. Skonstruować funkcję gładką

(a) f dodatnią na zbiorze $(-1, 1)$ i zerową poza nim;

(b) g o wartościach w $[0, 1]$, spełniającą $g(x) = 1$ dla $x \geqslant 1$ i $g(x) = 0$ dla $x \leqslant -1$;

(c) h o wartościach w $[0, 1]$, spełniającą $h \equiv 1$ na $[-1, 1]$ i $h \equiv 0$ poza $(-2, 2)$.

Wskazówka. Konstrukcję funkcji f, g, h można oprzeć na funkcji z poprzedniego zadania, i to nawet bez wchodzenia w szczegóły jej konstrukcji.

Zadania dodatkowe

Ponieważ temat jest ważny i bogaty w konsekwencje, polecam pochylić się również nad poniższymi zadaniami, których nie będziemy omawiać na zajęciach.

Zadanie 7.16. Podać wielomian Taylora $T_3^0 f(x)$ dla funkcji $f(x) = \sin^2(3x)$.

Zadanie 7.17. Wyznaczyć wielomian Taylora w zerze do wyrazu x^n włącznie i obliczyć $f^{(n)}(0)$.

(a) $x\cos x - \sin x$, $n = 7$;

(b) $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$, $n = 4$;

(c) $\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{30}}$, $n = 2$;

(d) $\ln(\cos x)$, $n = 6$.

Zadanie 7.18. Wyznaczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{\sin x - x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

Zadanie 7.19. Obliczyć

$$\lim_{x\to\infty} x\left(e - \left(1 + \tfrac{1}{x}\right)^x\right).$$

Wskazówka. Może się okazać przydatna reguła de l'Hospitala.

Zadanie 7.20. Wykazać, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna i $\frac{f(x)}{x^2} \xrightarrow{x\to 0} 0$, to $f''(0) = 0$. Uzasadnić, że założenie o dwukrotnej różniczkowalności jest istotne.

Zadanie 7.21. Niech $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^2 spełniającą $f(0) = 0$. Wyznaczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \sum_{k=1}^{\lfloor 1/\sqrt{x}\rfloor} f(kx).$$

Zadanie 7.22. Oszacuj błąd przybliżenia $\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$ dla $|x| < \frac{1}{2}$.

Zadanie 7.23. Wykorzystując wzór Taylora, wykazać nierówności

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \text{dla } x > 0.$$

Zadanie 7.24. Załóżmy, że f jest n-krotnie różniczkowalna. Wyprowadzić następujący wzór na resztę:

$$R_n^a f(x) = \frac{Q_x^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n+1}, \quad \text{gdzie} \quad Q_x(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Uwaga. Gdy f ma jedną pochodną więcej, wzór ten można wyprowadzić z Zadania 7.3.

Zadanie 7.25. Obliczyć granice:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)}{x^3}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$

Zadanie 7.26. ★ Ciąg (x_n) jest zadany rekurencyjnie wzorem $x_{n+1} = \sin(x_n)$, przy czym $x_0 \in (0, \pi/2)$. Zbadać asymptotykę tego ciągu, wykazując:

(a) $x_n \to 0$

(b) $\displaystyle\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \to \frac{1}{3}$

(c) $x_n \sim \sqrt{3/n}$

8 Praca domowa – wzór Taylora

Termin. Rozwiązania będą zbierane podczas zajęć **w środę 27 marca**. Każde zadanie powinno być napisane na oddzielnej kartce i podpisane czytelnie (najlepiej drukowanymi literami) imieniem i nazwiskiem. Fakty poznane na wykładzie i ćwiczeniach można i należy uznać za znane.

Zadanie 8.1. Podać wielomian Taylora $T_3^0 f(x)$ dla funkcji $f(x) = \frac{\sin^2(3x)}{1-x}$.

Zadanie 8.2. Wyznaczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2\sin x - 2\operatorname{tg} x}{x^5}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2} - \sqrt{\cos(2x)}}{x^2\ln(\cos x)}$

Zadanie 8.3. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) + \sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1\right).$$

Zadanie 8.4. Wykazać, że dla $|x| < 1$ błąd przybliżenia

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

nie przekracza $\frac{1}{720}$.

9 Zbieżność ciągów funkcyjnych

$$\begin{aligned} f_n \to f \text{ punktowo} \quad &\equiv \quad \forall\, x\; \forall\, \varepsilon\; \exists\, n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \text{ dla } n \geqslant n_0 \\ f_n \rightrightarrows f \text{ jednostajnie} \quad &\equiv \quad \forall\, \varepsilon\; \exists\, n_0\; \forall\, x \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \text{ dla } n \geqslant n_0 \end{aligned}$$

Zadanie 9.1. Czy szereg

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

zbiega punktowo? Czy jednostajnie? Czy niemal jednostajnie?

Zadanie 9.2. Wykazać, że granica punktowa funkcji wypukłych jest funkcją wypukłą.

Zadanie 9.3. Zbadać zbieżność jednostajną i punktową ciągów

(a) $f_n(x) = n^2 \cdot \dfrac{1 - \cos(\frac{x}{n})}{x}$ na zbiorach $[1, \infty)$ i $(0, 1]$;

(b) $g_n(x) = n^3 x \exp(-nx^2)$ na odcinku $[0, 1]$.

Zadanie 9.4. Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{x}{\exp(2x)}$. Definiujemy ciąg funkcyjny przez wielokrotne składanie funkcji:

$$f_n(x) = f^{\circ n}(x) = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ razy}}(x).$$

Zbadać zbieżność jednostajną tego ciągu na zbiorze $x \geqslant 0$.

Zadanie 9.5. Dla danej funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określmy rodzinę jej przesunięć, czyli funkcji $f_t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_t(x) = f(x - t)$. Wykazać, że

(a) f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu $t_n \to 0$ zachodzi zbieżność punktowa $f_{t_n} \to f$ na $\mathbb{R}$.

(b) f jest jednostajnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu $t_n \to 0$ zachodzi zbieżność jednostajna $f_{t_n} \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$.

Zadanie 9.6. Wykazać, że jeśli ciąg wielomianów P_n zbiega jednostajnie do f na $\mathbb{R}$, to funkcja f też jest wielomianem.

Wskazówka. Rozważyć konsekwencje warunku Cauchy'ego dla takiego ciągu.

Zadanie 9.7. Zbadać zbieżność ciągów f_n i f_n' na zadanym zbiorze:

(a) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ na $\mathbb{R}$;

(b) $g_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ na $[-1, 1]$.

Zadanie 9.8. Wykazać, że jednostajna granica funkcji ograniczonych jest ograniczona. Czy twierdzenie to prawdziwe jest w przypadku granicy punktowej?

Zadanie 9.9. Niech f będzie dowolną funkcją rzeczywistą i określmy $f_n(x) := \frac{\lfloor nf(x)\rfloor}{n}$. Udowodnić, że $f_n \rightrightarrows f$.

Uwaga. To zadanie pokazuje, że każda funkcja rzeczywista jest jednostajną granicą funkcji o wartościach wymiernych.

Zadanie 9.10. Wykazać, że ciąg wielomianów P_n określonych rekurencyjnie poprzez

$$P_0(x) = 0, \qquad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n(x)^2)$$

jest jednostajnie zbieżny na $[0, 1]$ do funkcji $f(x) = \sqrt{x}$.

Zadanie 9.11. Wykazać, że istnieje ciąg wielomianów jednostajnie zbieżny na przedziale $[-1, 1]$ do funkcji $|x|$.

Wskazówka. Skorzystać z poprzedniego zadania.

Zadanie 9.12. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma ciągłą pochodną, to ciąg funkcyjny $f_n(x) = n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$ zbiega do f' niemal jednostajnie na $\mathbb{R}$.

Zadanie 9.13. Powiemy, że f_n zbiega do f *w sposób ciągły na* $A \subseteq \mathbb{R}$, jeśli dla każdego ciągu $x_n \in A$ zbieżnego do $x \in A$ zachodzi zbieżność $f_n(x_n) \to f(x)$.

(a) Jeśli $f_n \to f$ w sposób ciągły na A, to f jest funkcją ciągłą na A (nawet gdy f_n są nieciągłe).

(b) Jeśli $f_n \rightrightarrows f$ na A i f jest funkcją ciągłą, to $f_n \to f$ w sposób ciągły na A.

(c) Na przykładach $A = [0, 1]$ i $A = (0, 1)$ udowodnić lub obalić twierdzenie odwrotne: czy z ciągłości f i ciągłej zbieżności $f_n \to f$ wynika zbieżność jednostajna $f_n \rightrightarrows f$?

Zadanie 9.14. Zbadać zbieżność punktową i jednostajną następujących ciągów funkcyjnych:

(a) $x^n - x^{2n}$ na $[0, 1]$

(b) $\frac{x^n}{1+x^n}$ na zbiorach $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 2]$, $[2, \infty)$

(c) $\frac{x}{n} \ln(x/n)$ na $(0, 1)$

(d) $e^{n(x-1)}$ na $(0, 1)$

(e) $\frac{1}{n} \ln(1 + e^{nx})$ na $\mathbb{R}$

(f) $x \operatorname{arc\,tg}(nx)$ na $(0, \infty)$

(g) $(1 + x^n)^{1/n}$ na $[0, 2]$

(h) $n \sin(x/n)$ na $[-\pi, \pi]$

10 Praca domowa – zbieżność ciągów funkcyjnych

Termin. Rozwiązania będą zbierane podczas zajęć **we wtorek 9 kwietnia**. Każde zadanie powinno być napisane na oddzielnej kartce i podpisane czytelnie (najlepiej drukowanymi literami) imieniem i nazwiskiem. Fakty poznane na wykładzie i ćwiczeniach można i należy uznać za znane.

Zadanie 10.1. Zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego

$$g_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}, \qquad g_n(x) = (1+x^n)^{1/n}.$$

Wskazówka. Można (choć nie trzeba) skorzystać z jednego z twierdzeń Diniego.

Zadanie 10.2. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma ciągłą pochodną, to ciąg funkcyjny $f_n(x) = n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))$ zbiega do f' niemal jednostajnie na $\mathbb{R}$.

Niemal jednostajnie oznacza, że dla każdego $M > 0$ zachodzi $f_n \rightrightarrows f'$ na $[-M, M]$.

11 Szeregi funkcyjne

Kryterium Weierstrassa. Jeśli $|f_n(x)| \leqslant M_n$ dla dowolnego x oraz szereg $\sum M_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny.

Tw. o różniczkowaniu granicy. Jeśli ciąg f_n' zbiega jednostajnie, a $f_n(x_0)$ zbiega dla jakiegoś x_0, to f_n zbiega jednostajnie do funkcji, której pochodną jest $\lim f_n'$.

Zadanie 11.1. Zbadać zbieżność następujących szeregów funkcyjnych:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}(n^2(1+x^2))\right)$ na $\mathbb{R}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^2(1-x^2)^{n-1}$ na $[-1,1]$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-n^2 x}$ na $[0,\infty)$

Zadanie 11.2. Wskazać przykład ciągu funkcji nieujemnych ciągłych $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, dla których szereg $\sum f_n$ jest jednostajnie zbieżny, ale nie można zastosować kryterium Weierstrassa (tj. szereg $\sum \sup f_n$ jest rozbieżny).

Zadanie 11.3. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2 + x^2}$$

jest dobrze określona i klasy C^1 na $\mathbb{R}$.

Zadanie 11.4. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}$$

jest dobrze określona i ciągła na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Zadanie 11.5. Wykazać, że funkcja

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ln\left(1 + n^2 x^2\right)$$

jest

(a) dobrze określona i ciągła na $\mathbb{R}$;

(b) klasy C^1 na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(c) nieróżniczkowalna w $x = 0$.

Zadanie 11.6. ★ Co prawda szereg $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ nie jest zbieżny do $1/2$, ale

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \xrightarrow{x \to 1^-} \frac{1}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow{x \to 0^+} \frac{1}{2}.$$

Wskazówka. Osobno zbadać dwa szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n^x} \pm \frac{1}{(n+1)^x}\right)$.

12 Szeregi potęgowe

Wzór Cauchy'ego-Hadamarda. Jeśli $M := \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < \infty$, to szereg $\sum a_n x^n$ jest niemal jednostajnie zbieżny na $(-\frac{1}{M}, \frac{1}{M})$. Ponadto pochodne tego szeregu otrzymujemy, różniczkując wyraz po wyrazie.

Zadanie 12.1. Niech (F_n) będzie ciągiem Fibonacciego: $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Wykazać, że szereg $F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ jest jednostajnie zbieżny na $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, a następnie wyprowadzić wzór $F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$.

Wskazówka. Wyprowadzić oszacowanie $F_n \leqslant 2^n$. Żeby wyznaczyć funkcję $F(x)$, porównać ją z funkcjami $xF(x)$ i $x^2F(x)$.

Uwaga. Korzystając z równości $\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_+-x} - \frac{1}{x_--x}\right)$ (gdzie $x_\pm = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$), rozwinięcia w szereg geometryczny oraz Zadania 12.2, można wyprowadzić jawny wzór na F_n.

Zadanie 12.2. Udowodnić, że jeśli funkcja f jest zadana przez zbieżny szereg potęgowy $\sum a_n x^n$, to jest równa swojemu szeregowi Taylora. Wywnioskować, że dwa różne szeregi potęgowe nie mogą być zbieżne do tej samej funkcji.

Zadanie 12.3. Rozwinąć następujące funkcje w szereg potęgowy:

(a) $\sin^2 x$

(b) $\frac{1}{(1-x)^3}$

(c) $\operatorname{arc\,tg} x$

(d) $\ln(1+x)$

Zadanie 12.4. Korzystając z Zadania 12.3, wyprowadzić równości

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \ln(2)$$

Zadanie 12.5. Podać przykład szeregu potęgowego $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o promieniu zbieżności 1, dla którego

(a) szereg zbiega w punkcie 1, tym samym funkcja f przedłuża się do funkcji ciągłej na $(-1, 1]$;

(b) szereg nie zbiega w punkcie 1, a granica $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ jest nieskończona;

(c) szereg nie zbiega w punkcie 1, a funkcja f mimo to przedłuża się do funkcji ciągłej na $(-1, 1]$.

Uwaga. Prawdziwe jest następujące twierdzenie: jeśli szereg zespolony $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ma promień zbieżności R, to funkcja nim zadana nie przedłuża się do funkcji ciągłej na domkniętym kole $\overline{B_R}$. Nie jest to jednak prawdą w przypadku rzeczywistym.

Zadanie 12.6. Załóżmy, że promień zbieżności szeregu potęgowego $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ wynosi 1, ponadto istnieje granica $g := \lim_{x\to 1^-} f(x)$. Wykazać, że jeśli zachodzi któryś z warunków

(a) $a_n \geqslant 0$,

(b) $na_n \to 0$,

to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego granicą jest g.

Zadanie 12.7. (o granicy górnej i dolnej) Uzasadnić następujące charakteryzacje granicy górnej ciągu (a_n):

(a) $\inf\limits_{n\geqslant 0} \sup\limits_{m\geqslant n} a_n$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{m\geqslant n} a_n \right)$;

(c) najmniejsza liczba M taka, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ zachodzi $a_n < M + \varepsilon$ dla dostatecznie dużych n (o ile taka istnieje, wpp. $+\infty$);

(d) największa liczba będąca granicą podciągu (a_n).

Sformułować analogiczne charakteryzacje dla granicy dolnej.

Zadanie 12.8. Wyznaczyć zbiór punktów zbieżności następujących szeregów potęgowych:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n x^n$$

$$\text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}} \right)^n x^n \qquad \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2} \qquad \text{(e)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n^2} x^{n!}$$

Zadanie 12.9. Wyznaczyć zbiór punktów zbieżności następujących szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{2^n n^3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{2x+1}{x}\right)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n4^n}{3^n} x^n(1-x)^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^n$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(\operatorname{tg} x)^n$

Zadanie 12.10. Dany jest szereg potęgowy $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o dodatnim promieniu zbieżności. Wyznaczyć n-tą pochodną w zerze $F^{(n)}(0)$ dla funkcji $F(x) = \frac{f(x)}{1-x}$.

13 Całka nieoznaczona

Zadanie 13.1. Obliczyć $\int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x$:

(a) przez części, przyjmując $f(x) = \sin x$ i $g'(x) = \cos x$,

(b) przez części, przyjmując $f'(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$,

(c) przez podstawienie, przyjmując $y = \sin x$,

(d) przez podstawienie, przyjmując $y = \cos x$,

(e) stosując wzór $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$.

Zadanie 13.2. Wyznaczyć całki nieoznaczone:

$$\int x^2\sqrt{2x^3-3} \qquad \int xe^x \qquad \int xe^{x^2} \qquad \int e^x \sin x$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x} \qquad \int \ln x \qquad \int (\ln x)^2 \qquad \int \frac{1}{x^2-1}$$

$$\int \operatorname{arc\,tg} x \qquad \int \frac{x^4}{x^2+1} \qquad \int \frac{x^2-1}{x^4+1} \qquad \int \sqrt{e^x-1}$$

Zadanie 13.3. Wyprowadzić wzór rekurencyjny pozwalający wyznaczyć $\int \cos^n x$ i $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$.
Wskazówka. Całkowanie przez części ($\cos = \sin'$) i podstawienie ($x = \operatorname{tg} u$).

Zadanie 13.4. Wyznaczyć całki nieoznaczone:

$$\int x^2 e^{-x} \qquad \int xe^x \sin x \qquad \int \frac{x^2}{1+x^2} \qquad \int \frac{1}{2x^2+3}$$

$$\int \arcsin x \qquad \int x \operatorname{arc\,tg} x \qquad \int x \arccos x$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} \qquad \int \cos^3 x \qquad \int e^{\sqrt{x}} \qquad \int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$$

Zadanie 13.5. (metoda ostatniej szansy) Wykazać, że podstawienie $t = \operatorname{tg}(x/2)$ pozwala sprowadzić całkę z funkcji wymiernej od $\sin x$, $\cos x$ do całki z funkcji wymiernej od t. Innymi słowy, wyprowadzić wzory postaci

$$\sin x = f(t), \qquad \cos x = g(t), \qquad \mathrm{d}x = h(t)\,\mathrm{d}t.$$

Zadanie 13.6. (o funkcjach hiperbolicznych) Definiujemy tzw. *hiperboliczne funkcje trygonometryczne* $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

(a) Sprawdzić, że zachodzą równości $\sinh' = \cosh$, $\cosh' = \sinh$, $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$.

(b) Wyprowadzić jawnym wzorem odwrotności funkcji $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cosh\colon [0,\infty) \to [1,\infty)$ *(parzystość* $\cosh$ *sprawia, że nie da się tej funkcji odwrócić globalnie)*

(c) Wyznaczyć całki nieoznaczone

$$\int \sqrt{1+x^2}, \qquad \int \sqrt{x^2-1}, \qquad \int \sqrt{1-x^2}.$$

Uwaga. Warto porównać definicje i własności sinh, cosh z definicjami i własnościami cos, sin: $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$ oraz $\sin^2 + \cos^2 = 1$.

Zadanie 13.7. Wyznaczyć całki nieoznaczone:

(a) $\sin^3 x \cos^2 x$

(b) $\sin^4 x \cos^3 x$

(c) $\sin^2 x \cos^4 x$

(d) $\dfrac{1}{\sin^2 x \cos x}$

(e) $\dfrac{2\sin x + 3\cos x}{\sin^2 x \cos x + 2\cos^3 x}$

(f) $\dfrac{\cos^5 x}{1+\sin^2 x}$

(g) $\dfrac{1}{1+\sin x + \cos x}$

Zadanie 13.8. Wyznaczyć całki nieoznaczone z następujących funkcji wymiernych:

(a) $\dfrac{1}{x^4-1}$

(b) $\dfrac{1}{x(1+x^2)}$

(c) $\dfrac{1}{5x^2+2x+1}$

(d) $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$

Zadanie 13.9. Wyznacz jawnym wzorem funkcje zadane przez następujące szeregi potęgowe:

$$\text{a)}\ \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \text{b)}\ \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{2n}, \quad \text{c)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (5^n + 7^n) x^n,$$
$$\text{d)}\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n, \quad \text{e)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \text{f)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

Rozwiń następujące funkcje w szeregi potęgowe:

$$\text{g)}\ \frac{1}{1-x} \quad \text{h)}\ \frac{1}{1-3x^2} \quad \text{i)}\ \frac{2-12x}{35x^2-12x+1}$$
$$\text{j)}\ \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{k)}\ \ln(1-x) \quad \text{l)}\ (x+1)(\ln(1+x)-1).$$

14 Całka oznaczona

Zadanie 14.1. Obliczyć następujące całki oznaczone:

$$\text{a)} \int_1^2 \frac{2x^2}{x^3+1} \qquad \text{b)} \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \qquad \text{c)} \int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x$$
$$\text{d)} \int_0^{\pi/2} x \sin x \qquad \text{e)} \int_1^4 \frac{\ln x}{x} \qquad \text{f)} \int_0^2 x e^{x^2}$$
$$\text{g)} \int_0^3 x^2(2x^3+4)^2 \qquad \text{h)} \int_0^3 x\sqrt{9-x^2} \qquad \text{i)} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x$$

Zadanie 14.2. Obliczyć pochodne następujących funkcji zmiennej x:

$$\text{a)} \int_1^x t(1+t^2)^5 \, \mathrm{d}t, \quad \text{b)} \int_0^{\sin x} 1-t^2 \, \mathrm{d}t \quad \text{c)} \int_{x-1}^{x^2} e^{t^2} \, \mathrm{d}t$$

Zadanie 14.3. Uzasadnić, że

$$f(x) \leqslant g(x) \text{ dla } x \in [a,b] \qquad \Longrightarrow \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

zarówno dla całki Riemanna, jak i całki Newtona.

Zadanie 14.4. Dla każdej z poniższych całek niewłaściwych wyznaczyć zakres parametrów $a \in \mathbb{R}$, dla których całka ta jest zbieżna:

$$\int_0^1 x^a \,\mathrm{d}x \qquad \int_1^\infty x^a \,\mathrm{d}x \qquad \int_0^\infty x^a \,\mathrm{d}x.$$

Zadanie 14.5. Zbadać zbieżność następujących całkek niewłaściwych:

$$\text{a)} \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \qquad \text{b)} \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{c)} \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{d)} \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4+4}$$
$$\text{e)} \int_0^\infty x e^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{f)} \int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2} \qquad \text{g)} \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x}$$

Wskazać wartość tych spośród nich, które są zbieżne.

Wskazówka. Z Zadania 14.3 wynika, że można zastosować zasadę porównawczą analogiczną do tej dla szeregów o wyrazach nieujemnych.

Zadanie 14.6. Obliczyć granice

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t,\quad \text{b)}\ \lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{\cos(t/x)}{t^2}\,\mathrm{d}t,\quad \text{c)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{e^x}.$$

Zadanie 14.7. (a) Niech φ będzie funkcją ciągłą. Wykazać, że

$$\int_0^\pi x\varphi(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \varphi(\sin x).$$

(b) Wyznaczyć całkę

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Zadanie 14.8. Niech $P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}((x^2-1)^n)^{(n)}$. Wyznaczyć

$$a_{nk} := \int_{-1}^1 P_n(x)P_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zadanie 14.9. (wzór Wallisa) Niech $a_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x$ dla $n \geqslant 0$. Wykazać, że

(a) $a_0 = \pi/2$, $a_1 = 1$;

(b) $a_n = \frac{n-1}{n}a_{n-2}$, w konsekwencji $a_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$, $a_{2n+1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$;

(c) (a_n) jest nierosnący oraz $\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} \to 1$;

(d) $\displaystyle \frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2.$

15 Przejście do granicy pod znakiem całki

Zadanie 15.1. Wykazać następujące twierdzenia o przejściu do granicy pod znakiem całki:

(a) Jeśli $f_k \in C^0([a,b])$ oraz $f_k \rightrightarrows f$, to $\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{k\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Jeśli $f_k \in C^0([0,\infty))$ oraz $f_k \overset{\text{n.j.}}{\rightrightarrows} f$, a ponadto funkcje f_k posiadają wspólne ograniczenie $|f_k(x)| \leqslant g(x)$ przez funkcję g spełniającą $\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ (tzw. majorantę), to $\int_0^\infty f_k(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{k\to\infty} \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.

Wskazówka. W b) zastosować ograniczenie $|\int_M^\infty f_k(x)\,\mathrm{d}x| \leqslant \int_M^\infty g(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{M\to\infty} 0$.

Zadanie 15.2. Wyznaczyć następujące granice:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n^4\int_n^{n+1}\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^5+1}\right)$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n^3\int_n^{2n}\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^5+1}\right)$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3\pi}\int_\pi^{2\pi}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\operatorname{arc\,tg}(nx)}\right)^n$

Wskazówka. W c) skorzystać z pomocniczych faktów:

$$\frac{y}{\operatorname{arc\,tg}(y)} - \frac{y}{\pi/2} \xrightarrow{y\to\infty} \frac{4}{\pi^2};$$
$$a_n \to a \quad\Longrightarrow\quad (1+\tfrac{a_n}{n})^n \to e^a.$$

Zadanie 15.3. Wykazać równość

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}.$$

Wskazówka. Rozwinąć funkcję podcałkową w szereg.

Zadanie 15.4. Dana jest funkcja dwóch zmiennych $f(t,x)$ taka, że funkcje f oraz $\partial_t f$ (czyli pochodna funkcji $t \mapsto f(t,x)$) są jednostajnie ciągłe i ograniczone. Wykazać, że wówczas

$$\partial_t \int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \partial_t f(t,x)\,\mathrm{d}x.$$

Uwaga. Przykład zastosowania *przejścia z pochodną pod znak całki* można zobaczyć w Zadaniu 15.5. Zainteresowanym polecam tekst K. Conrada Differentiating under the integral sign.

Zadanie 15.5. Szukamy wartości całki $J := \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. W tym celu określmy funkcję

$$F(t) := \int_0^\infty \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{dla } t \in \mathbb{R}.$$

(a) Uzasadnić, że $F(0) = \pi/2$ oraz $F(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$.

(b) Wyprowadzić równość $F'(t) = -2e^{-t^2}\int_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$.
(można przyjąć, że dozwolone jest przejście z różniczkowaniem pod znak całki)

(c) Wyznaczyć wartość $F(t)|_0^\infty = -2J^2$.

(d) Wywnioskować, że $J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Wskazówka. Skorzystać z poprzednich dwóch zadań.

Zadanie 15.6. Korzystając ze znajomości całki $\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$, wyprowadzić równość

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = n!$$

na dwa sposoby:

(a) całkując przez części n razy;

(b) różniczkując n razy funkcję $f(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\,\mathrm{d}t$.

Uwaga. Funkcja $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ nosi nazwę *funkcji Gamma Eulera*. Teza zadania stwierdza równość $\Gamma(s) = (s-1)!$ dla $s = 1, 2, \ldots$.

16 Praca domowa – zastosowania całki

Termin. Rozwiązania będą zbierane podczas zajęć **we wtorek 11 czerwca**. Każde zadanie powinno być napisane na oddzielnej kartce i podpisane czytelnie (najlepiej drukowanymi literami) imieniem i nazwiskiem. Fakty poznane na wykładzie i ćwiczeniach można i należy uznać za znane.

Zadanie 16.1. Funkcja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowana jest wzorem

$$g(x) = \int_{2x}^{3x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne oraz (maksymalne) przedziały monotoniczności funkcji g.

(b) Czy funkcja g jest ograniczona?

Zadanie 16.2. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t}{x^3}.$$

Wskazówka. Zastosować podstawienie $t = xu$ lub regułę de l'Hospitala.

Zadanie 16.3. Dla $m = 1, 2, 3, \ldots$ wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^m + 2^m + \ldots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}.$$

Zadanie 16.4. Wyprowadzić nierówności

$$\tfrac{1}{4}n^2\pi \leqslant \sum_{k=0}^{n} \sqrt{n^2 - k^2} \leqslant \tfrac{1}{4}n^2\pi + n \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Wskazówka. Porównać tę sumę z całką $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.