Zadanie 4 z kolokwium AM I.2

Michał Miśkiewicz

4 kwietnia 2024

Zadanie 4. Rozważmy wielomian $W(x) = x^3 - 3x^2 + 12x + 1$.

(a) Udowodnić, że W jest ściśle monotoniczny. Czy istnieje funkcja odwrotna do W?

(b) Wykazać, że istnieje dokładnie jedna funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca tożsamość

$$(f(y))^3 - 3(f(y))^2 + 12f(y) + 1 = y \qquad \text{dla } y \in \mathbb{R}.$$

(c) Uzasadnić, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $y = 1$ i wyznaczyć $f'(1)$.

Popularne błędy

- $x^2 - 2x + 4 = (x-2)^2$
  Co zaskakujące, był to najbardziej popularny błąd (14 prac). Jeśli tylko konkluzja została wyciągnięta poprawnie (funkcja W jest rosnąca), nie odejmowałem za to punktów.

- Funkcja $W(x)$ jest rosnąca dla każdego $x \in \mathbb{R}$.
  Monotoniczność nie jest cechą, którą można sprawdzić punkt po punkcie, np. znajomość wartości $W(0) = 1$ nie przybliża nas do rozstrzygnięcia monotoniczności W w otoczeniu zera.

- a) Jeśli $W' \geqslant 0$ wszędzie, to funkcja W jest rosnąca.
  b) Jeśli funkcja W jest rosnąca, to $W' > 0$ wszędzie.
  Jedno i drugie jest nieprawdą, co zresztą nie ma znaczenia dla zadania (bo $W' > 0$ wszędzie i interesuje nas tylko jedna implikacja), ale i tak się pojawiało.

- Wprowadzenie nowej nazwy na funkcję W.
  Samo w sobie nie jest to błędem, ale jeśli nowe oznaczenie nie jest wprowadzone wprost, to jest to bardzo zły styl, a przy tym prosta droga do zgubienia sprawdzającego. Czasami funkcje W oznaczano przez f (otrzymując kolizję oznaczeń), a w niektórych pracach funkcja W miała nawet trzy różne nazwy. Doceniam te nieliczne prace, w których wprost stwierdzono, że wprowadzenie nowego oznaczenia wynika z przyzwyczajeń (estetycznych?) piszącego.

- Skoro W jest różnowartościowa, to posiada odwrotność. Skoro W^{-1} istnieje, to spełnia warunek nałożony na funkcję f.
  Każde z tych zdań z osobna jest prawdziwe w odpowiednim kontekście, ale razem już nie. Trzeba mianowicie ustalić, czy „posiada odwrotność" dotyczy funkcji $W\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ czy funkcji $W\colon \mathbb{R} \to W(\mathbb{R})$. W pierwszym przypadku pierwsze zdanie wymaga dodatkowego uzasadnienia, a w drugim przypadku – drugie.

- Pochodną funkcji $(f(y))^3 - 3(f(y))^2 + 12f(y) + 1$ jest $3(f(y))^2 - 6f(y) + 12$.
  Jeśli f spełnia zadaną tożsamość, to pochodną tej funkcji jest 1. Podane tu wyrażenie to pochodna funkcji W ewaluowana w punkcie $f(y)$ i raczej nie znajduje ono zastosowania w rozwiązaniu.

- Jeśli W jest odwracalna i $W'(x)$ istnieje, to $(W^{-1})'(W(x))$ również istnieje.

- Gdy funkcja odwrotna f istnieje i jest różniczkowalna, to pochodna wyraża się wzorem $f'(y) = \frac{1}{W'(y)}$.
  Prawidłowy wzór to $f'(y) = \frac{1}{W'(x)}$, gdzie $x = f(y)$. Wydaje się, że jest to niewinny błąd w zapamiętaniu wzoru, ale jednak ma podstawowe znaczenie. Punkty x i y „żyją w innych przestrzeniach", czego może nie widać w tym przypadku, ale dla dowolnej pary funkcji wzajemnie odwrotnych $(0,1) \rightleftarrows (2,5)$ robi się jasne (jeśli x jest w dziedzinie jednej funkcji, to w dziedzinie drugiej już nie). Drogą do samodzielnego wyprowadzenia właściwego wzoru jest zróżniczkowanie stronami tożsamości $W(f(y)) = y$ (co wiele osób zresztą zrobiło).

Rozwiązanie (wersja I)

a) Obliczamy

$$W'(x) = 3x^2 - 6x + 12 = 3(x^2 - 3x + 4) = 3((x-1)^2 + 3) > 0,$$

a więc W jest funkcją ściśle rosnącą. Ponadto $W(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$ oraz $W(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$, więc z własności Darboux wnioskujemy, że obrazem W jest cała prosta rzeczywista. W konsekwencji $W\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest bijekcją i posiada funkcję odwrotną W^{-1}.

b) Podany warunek można zapisać jako $W(f(y)) = y$ dla $y \in \mathbb{R}$. Przykładając do obu stron funkcję W^{-1}, otrzymujemy

$$f(y) = W^{-1}(W(f(y))) = W^{-1}(y),$$

a więc jedynym kandydatem na f jest funkcja W^{-1}. Oczywiście spełnia ona podany warunek.

c) Skoro $W'(x) > 0$ dla wszystkich x, to z twierdzenia z wykładu funkcja f jest różniczkowalna dowolnym punkcie, ponadto $f'(1) = \frac{1}{W'(f(1))}$. Wartość $f(1)$ znajdujemy, rozwiązując równanie $W(x) = 1$. Łatwo znaleźć rozwiązanie $x = 0$, a wiemy, że rozwiązanie jest tylko jedno, a więc $f(1) = 0$. Ostatecznie:

$$f'(1) = \frac{1}{W'(0)} = \frac{1}{12}.$$

Rozwiązanie (wersja II)

a) Rozważmy dowolne $x \in \mathbb{R}$ oraz $h > 0$. Wówczas bezpośredni rachunek daje

$$\begin{aligned} W(x+h) - W(h) &= ((x+h)^3 - x^3) - 3((x+h)^2 - x^2) + 12((x+h) - x) + (1-1) \\ &= 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 6xh - 3h^2 + 12h \\ &= h(h^2 + 3(x-1)h + 3(x^2 - 2x + 4)). \end{aligned}$$

Żeby wykazać, że $W(x+h) - W(h) > 0$, wystarczy sprawdzić, że wyrażenie w nawiasie jest dodatnie. W tym celu zapiszmy je w postaci

$$\begin{aligned} h^2 + 3(x-1)h + 3(x^2 - 2x + 4) &= h^2 + 3(x-1)h + 3((x-1)^2 + 3) \\ &= \left(h - \frac{3}{2}(x-1)\right)^2 + \frac{3}{4}(x-1)^2 + 9 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Funkcja W jest więc ściśle rosnąca. Ponadto $W(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$ oraz $W(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$, więc z własności Darboux wnioskujemy, że obrazem W jest cała prosta rzeczywista. W konsekwencji $W\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest bijekcją i posiada funkcję odwrotną W^{-1}.

b) Jeśli ustalimy $y \in \mathbb{R}$, to wartość $x := f(y)$ jest rozwiązaniem równania $W(x) = y$. Z podpunktu a) wiemy, że istnieje dokładnie jedno takie rozwiązanie i jest to $W^{-1}(x)$, a więc wybór $f(y)$ jest jednoznaczny. W konsekwencji istnieje dokładnie jedna funkcja f spełniająca zadany warunek – jest to funkcja W^{-1}.

c) Odejmując stronami równości

$$\begin{aligned} y &= (f(y))^3 - 3(f(y))^2 + 12f(y) + 1, \\ 1 &= (f(1))^3 - 3(f(1))^2 + 12f(1) + 1, \end{aligned}$$

otrzymujemy

$$y - 1 = (f(y) - f(1))((f(y))^2 + f(y)f(1) + (f(1))^2 - 3f(y) - 3f(1) + 12).$$

Dla $y \neq 1$ oba czynniki po prawej stronie muszą być niezerowe, otrzymujemy więc wzór na iloraz różnicowy:

$$\frac{f(y) - f(1)}{y - 1} = \frac{1}{(f(y))^2 + f(y)f(1) + (f(1))^2 - 3f(y) - 3f(1) + 12}.$$

Z twierdzenia z wykładu wiemy, że funkcja f jest ciągła jako odwrotność funkcji ciągłej $W\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a zatem $f(y) \to f(1)$ przy $y \to 1$.

W konsekwencji

$$f'(1) = \lim_{y \to 1} \frac{f(y) - f(1)}{y - 1} = \frac{1}{3(f(1))^2 - 6f(1) + 12},$$

o ile tylko mianownik nie jest zerowy. Możemy się jednak przekonać, że rozwiązaniem $x = f(1)$ równania $W(x) = 1$ jest $x = 0$ (wiemy już, że rozwiązanie jest jednoznaczne, co zresztą łatwo sprawdzić bezpośrednio), a to oznacza, że $f(1) = 0$ oraz $f'(1) = \frac{1}{12}$.

O ciągłości f w $y = 1$ można też przekonać się bezpośrednio, powtarzając dowód z wykładu. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ wystarczy bowiem wziąć y z przedziału $(W(-\varepsilon), W(\varepsilon))$ (zawierającego $W(0) = 1$), by otrzymać

$$W(-\varepsilon) < y < W(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad -\varepsilon = f(W(-\varepsilon)) < f(y) < f(W(\varepsilon)) = \varepsilon.$$