

## 16 Praca domowa – zastosowania całki

**Termin.** Rozwiązania będą zbierane podczas zajęć **we wtorek 11 czerwca**. Każde zadanie powinno być napisane na oddzielnej kartce i podpisane czytelnie (najlepiej drukowanymi literami) imieniem i nazwiskiem. Fakty poznane na wykładzie i ćwiczeniach można i należy uznać za znane.

---

**Zadanie 16.1.** Funkcja  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zdefiniowana jest wzorem

$$g(x) = \int_{2x}^{3x} e^{-t^2} dt.$$

- Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne oraz (maksymalne) przedziały monotoniczności funkcji  $g$ .
- Czy funkcja  $g$  jest ograniczona?

**Zadanie 16.2.** Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^3}.$$

*Wskazówka.* Zastosować podstawienie  $t = xu$  lub regułę de l'Hospitala.

**Zadanie 16.3.** Dla  $m = 1, 2, 3, \dots$  wykazać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^m + 2^m + \dots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}.$$

**Zadanie 16.4.** Wyprowadzić nierówności

$$\frac{1}{4}n^2\pi \leq \sum_{k=0}^n \sqrt{n^2 - k^2} \leq \frac{1}{4}n^2\pi + n \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

*Wskazówka.* Porównać tę sumę z całką  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ .