Zadanie 3 z kolokwium AM II.2

Michał Miśkiewicz

13 maja 2024

Zadanie 3. Dany jest ciąg zbiorów mierzalnych $A_k \subseteq \mathbb{R}^n$ spełniający warunek

$$\lambda_n(A_k \div A_{k+1}) \leqslant 2^{-k} \qquad \text{dla } k = 1, 2, 3, \ldots,$$

przy czym symbol $\div$ oznacza różnicę symetryczną dwóch zbiorów.
Wykaż, że istnieje zbiór mierzalny $A \subseteq \mathbb{R}^n$, dla którego $\lambda_n(A_k \div A)$ zbiega do zera przy $k \to \infty$.

Uwaga. Poniżej omawiam dwa przykładowe rozwiązania – oba znalazły się wśród rozwiązań studentów na kolokwium. Pierwsze rozwiązanie wprost wskazuje szukany zbiór, natomiast drugie sprowadza problem do zupełności przestrzeni $L^1(\mathbb{R}^n)$. Zaletą drugiego rozwiązania jest jego zwięzłość. Pierwsze rozwiązanie jest natomiast o tyle interesujące, że prowadzi do alternatywnego dowodu zupełności przestrzeni L^1 – dla zainteresowanych odpowiednie rozumowanie naszkicowałem w ostatniej sekcji.

Rozwiązanie (wersja I)

Poszukujemy zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^n$, który byłby „granicą" ciągu zbiorów A_k [1]. Jest dosyć intuicyjne, że od poszukiwanego zbioru oczekujemy następujących dwóch własności:

a) jeśli $x \in A_m$ dla dostatecznie dużych m, to $x \in A$;

b) jeśli $x \notin A_m$ dla dostatecznie dużych m, to $x \notin A$.

[1] Cudzysłów można by pominąć, gdybyśmy odnotowali, że wielkość $d(A, B) = \lambda_n(A \div B)$ jest nieujemna, symetryczna i spełnia nierówność trójkąta. Mamy więc do czynienia z pseudometryką (pseudo, bo warunek $d(A, B) = 0$ zachodzi nie tylko wtedy, gdy $A = B$).

Oczywiście warunki te się nie wykluczają, więc istnieją zbiory spełniające oba. Pokażemy najpierw, że dowolny spełniający warunki a) i b) *mierzalny* zbiór A spełnia również warunek z tezy zadania. W tym celu pokażemy, że

$$A_k \div A \subseteq \bigcup_{m \geqslant k} (A_m \div A_{m+1}). \tag{1}$$

To wystarczy, ponieważ z monotoniczności i przeliczalnej podaddytywności λ_n wnioskujemy:

$$\lambda_n(A_k \div A) \leqslant \lambda_n\left(\bigcup_{m \geqslant k} (A_m \div A_{m+1})\right) \leqslant \sum_{m \geqslant k} \lambda_n(A_m \div A_{m+1}) \leqslant \sum_{m \geqslant k} 2^{-m} \leqslant 2^{-k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Przejdźmy więc do dowodu zawierania (**??**). Przydatne będzie przeformułowanie warunków a) i b) przez zaprzeczenie:

a) jeśli $x \notin A$, to $x \notin A_m$ dla nieskończenie wielu m;

b) jeśli $x \in A$, to $x \in A_m$ dla nieskończenie wielu m.

Załóżmy, że $x \notin A_k$ oraz $x \in A$. Skoro $x \in A_m$ dla nieskończenie wielu m, to również dla nieskończenie wielu $m > k$. Weźmy pierwsze takie miejsce: $x \notin A_m$ i $x \in A_{m+1}$. Wówczas $x \in A_m \div A_{m+1}$, co oznacza, że x leży zbiorze po prawej stronie (**??**). Podobnie w przypadku $x \in A_k$ i $x \notin A$ wystarczy rozważyć pierwszy indeks $m \geqslant k$, dla którego $x \notin A_{m+1}$, a wówczas $x \in A_m \div A_{m+1}$.

Pozostaje uzasadnić, że wśród zbiorów spełniających a) i b) jest przynajmniej jeden mierzalny. Wskażemy dwa – największy i najmniejszy z takich zbiorów:

$$\limsup_{k\to\infty} A_k = \{x \,:\, x \in A_k \text{ dla niesk. wielu } k\} = \bigcap_{m \geqslant 1} \bigcup_{k \geqslant m} A_k,$$
$$\liminf_{k\to\infty} A_k = \{x \,:\, x \in A_k \text{ dla dost. dużych } k\} = \bigcup_{m \geqslant 1} \bigcap_{k \geqslant m} A_k.$$

Ponieważ zbiory te umiemy przedstawić poprzez przeliczalne operacje na zbiorach mierzalnych, więc również $\limsup A_k$ i $\liminf A_k$ są mierzalne, co kończy rozwiązanie zadania.

Uwaga. Warto odnotować, że teza zadania zachodzi dla *każdego* zbioru spełniającego a) i b), to zbiór punktów niezdeterminowanych przez te warunki ma miarę zero. Innymi słowy, dla prawie każdego $x \in \mathbb{R}^n$ od pewnego miejsca zachodzi $x \in A_m$ lub od pewnego miejsca zachodzi $x \in A_m$. Lub jeszcze inaczej: ciąg indykatorów $\mathbb{1}_{A_k}$ jest zbieżny prawie wszędzie.

Rozwiązanie (wersja II)

Zauważmy, że dla dowolnych zbiorów mierzalnych $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ mamy

$$\lambda_n(A \div B) = \int_{A \div B} \mathrm{d}\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B| \,\mathrm{d}\lambda_n = \|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B\|_{L^1}.$$

Rozważmy więc ciąg indykatorów $f_k := \mathbb{1}_{A_k}$. Założenie zadania stwierdza, że $\|f_k - f_{k+1}\|_{L^1} \leqslant 2^{-k}$, co przez zastosowanie nierówności trójkąta daje dla $k < m$:

$$\|f_k - f_m\|_{L^1} \leqslant \|f_k - f_{k+1}\|_{L^1} + \ldots + \|f_{m-1} - f_m\|_{L^1} \leqslant 2^{-k} + \ldots + 2^{-m+1} \leqslant 2^{-k+1}.$$

Mamy więc do czynienia z ciągiem Cauchy'ego, z jednym zastrzeżeniem: potencjalnie zbiory A_k mogą mieć nieskończoną miarę, a więc funkcje f_k nie muszą leżeć w $L^1(\mathbb{R}^n)$. Jest jednak prawdą, że ciąg funkcji $g_k := f_k - f_1$ leży w $L^1(\mathbb{R}^n)$ i spełnia warunek Cauchy'ego. Z zupełności przestrzeni $L^1(\mathbb{R}^n)$ wnioskujemy więc, że ciąg ten jest zbieżny w normie do pewnej funkcji $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Na pewnym podciągu zachodzi zbieżność $g_{k_l} \to g$ prawie wszędzie [2], a więc również zbieżność $f_{k_l} \to g + f_1$ prawie wszędzie. Skoro funkcje f_k przyjmują wyłącznie wartości $0, 1$, to mamy również $g(x) + f_1(x) \in \{0, 1\}$ prawie wszędzie. Istnieje więc zbiór mierzalny $A := (g + f_1)^{-1}(1)$ spełniający $g + f_1 = \mathbb{1}_A$ prawie wszędzie. Pozostaje sprawdzić, że

$$\lambda_n(A_k \div A) = \|\mathbb{1}_{A_k} - \mathbb{1}_A\|_{L^1} = \|f_k - (g + f_1)\|_{L^1} = \|g_k - g\|_{L^1} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Alternatywny dowód zupełności przestrzeni L^1

Zacznijmy od zupełności przestrzeni zbiorów mierzalnych. Przyjmijmy metrykę

$$d(A, B) := \lambda_n(A \div B) \quad \text{dla mierzalnych } A, B \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Jak można się przekonać, jest to funkcja nieujemna, symetryczna i spełniająca nierówność trójkąta. To ostatnie najłatwiej sprawdzić, charakteryzując różnicę symetryczną $X := A \div B$ jako najmniejszy zbiór spełniający $A \subseteq B \cup X$ i $B \subseteq A \cup X$. By faktycznie była to metryka, ograniczmy się do zbiorów będących w skończonej odległości od jakiegoś ustalonego zbioru $\mathbf{0} \subseteq \mathbb{R}^n$ (można przyjąć $\mathbf{0} = \emptyset$, wtedy ograniczamy się do zbiorów skończonej miary) i utożsamijmy pary zbiorów różniące się o zbiór miary zero (czyli pary spełniające $d(A, B) = 0$) – powstałą przestrzeń metryczną oznaczmy przez $\mathcal{L}_{\mathbf{0}}(\mathbb{R}^n)$.

[2] Gdyby przyjrzeć się dowodowi tego faktu, to okazałoby się, że w rozważanym tu przypadku nie ma konieczności wybierania podciągu.

Rozważmy teraz ciąg Cauchy'ego A_k w $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbf{0}}(\mathbb{R}^n)$. Można wybrać z niego pociąg A_{k_l} spełniający

$$d(A_{k_l}, A_{k_m}) \leqslant 2^{-l} \quad \text{dla } l \leqslant m, \tag{2}$$

w szczególności spełnione są założenia zadania. Istnieje więc zbiór mierzalny A będący granicą podciągu A_{k_l}, a w konsekwencji całego ciągu A_k. Jest przy tym jasne, że A jest w skończonej odległości od $\mathbf{0}$, czyli $A \in \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbf{0}}(\mathbb{R}^n)$. To dowodzi zupełności przestrzeni $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbf{0}}(\mathbb{R}^n)$.

Dowiedziemy teraz zupełności $L^1(\mathbb{R}^n)$. Każdej funkcji $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ przyporządkujmy zbiór

$$A(f) := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,:\, t < f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1},$$

czyli figurę pod wykresem funkcji f. Za zbiór $\mathbf{0}$ przyjmijmy zbiór $A(0)$, czyli $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_-$. W oparciu o twierdzenie Fubiniego łatwo się przekonać, że gdy $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to $A(f) \in \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbf{0}}(\mathbb{R}^{n+1})$. Ponadto $f \mapsto A(f)$ jest włożeniem izometrycznym, to znaczy $d(A(f), A(g)) = \|f - g\|_{L^1}$. Wykażemy, że podprzestrzeń $G \subseteq \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbf{0}}(\mathbb{R}^n)$ złożona ze zbiorów postaci $A(f)$ jest domknięta w $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbf{0}}(\mathbb{R}^{n+1})$. Z zupełności $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbf{0}}(\mathbb{R}^{n+1})$ wyniknie wtedy zupełność G, a w konsekwencji – dzięki wskazanej izometrii – również zupełność $L^1(\mathbb{R}^n)$.

To również wywnioskujemy z rozwiązanego zadania. Przyjmijmy, że ciąg $A(f_k)$ jest zbieżny do pewnego $A \in \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbf{0}}(\mathbb{R}^{n+1})$. Wybierając odpowiedni podciąg, możemy zagwarantować szybką zbieżność jak w (**??**). Przy tym założeniu rozwiązanie zadania mówi nam, że granicą A ciągu $A(f_k)$ jest zbiór $\limsup A(f_k)$. Naturalnie nasuwa się hipoteza, że jest on tożsamy ze zbiorem $A' := A(\limsup f_k)$. I rzeczywiście,

$$A' \div A' \subseteq \{(x, f(x)) \,:\, x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Z twierdzenia Fubiniego wiemy, że wykres funkcji mierzalnej ma miarę zero, co kończy dowód.

Uwaga. Warto odnotować, że równie dobrze granicą $A(f_k)$ jest $\liminf A(f_k)$, a więc $A(\liminf f_k)$. Wykazaliśmy zatem w szczególności, że z warunku $\|f_l - f_m\|_{L^1} \leqslant 2^{-l}$ $(l \leqslant m)$ wynika zbieżność prawie wszędzie ciągu f_k.